Uppgift 10.2

Låt

$$\mathbb{W} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\-3\end{pmatrix}\right] \subset \mathbb{R}^4.$$

Deluppgift 1

Vi skall bestämma en ON-bas för $\mathbb{W}$. Låt $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, -1, -2)$ och $\mathbf{v}_3 = (1, 3, -1, -3)$. Vi börjar med att normera första vektorn:

$$\mathbf{f}_1 \coloneqq \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

som är vår första ON-basvektor för $\mathbb{W}$. Nu beräknar vi skuggan av $\mathbf{v}_2$ på $\mathbf{f}_1$ (som ju har längd 1):

$$\mathbf{v}_{2\|} \coloneqq (\mathbf{v}_2|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\-3\end{pmatrix}.$$

En vektor i $\mathbb{W}$ (rent av i höljet av de två första vektorerna) vinkelrät mot $\mathbf{f}_1$ är alltså

$$\mathbf{v}_{2\perp} \coloneqq \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2\|} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

och (ganska onödig) normering ger vår nya basvektor:

$$\mathbf{f}_2 \coloneqq \frac{1}{\|\mathbf{v}_{2\perp}\|}\mathbf{v}_{2\perp} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Vi beräknar nu skuggan av den tredje vektorn på basvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$:

$$\mathbf{v}_{3\|\mathbf{f}_1} \coloneqq (\mathbf{v}_3|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_{3\|\mathbf{f}_2} \coloneqq (\mathbf{v}_3|\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Skuggan av $\mathbf{v}_3$ på det linjära höljet $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$ är alltså (*eftersom* $\mathbf{f}_1$ *och* $\mathbf{f}_2$ *är ON!!*)

$$\mathbf{v}_{3\|} \coloneqq \mathbf{v}_{3\|\mathbf{f}_1} + \mathbf{v}_{3\|\mathbf{f}_2} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

så att en vektor i $\mathbb{W}$ vinkelrät mot både $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är

$$\mathbf{v}_{3\perp} \coloneqq \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_{3\parallel} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Detta betyder uppenbarligen att $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_{3\parallel}$, d.v.s. att $\mathbf{v}_3$ redan ligger i det linjära höljet av de två första vektorerna! Hade vi fått en nollskild vektor hade vi normerat den och kallat resultatet $\mathbf{f}_3$, och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ hade då varit en bas för $\mathbb{W}$ som alltså hade varit tre-dimensionellt. Nu ser vi i stället att $\mathbb{W}$ är två-dimensionellt och att en ON-bas utgörs av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

Svar: En ON-bas för $\mathbb{W}$ utgörs av $\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Deluppgift 2

Vi skall utvidga basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$. Vi hittar då på en ny vektor (som förhoppningsvis inte ligger i $\mathbb{W}$),

$$\mathbf{u}_3 \coloneqq (1, 0, 0, 0),$$

säg, och beräknar skuggan av $\mathbf{u}_3$ på $\mathbb{W}$:

$$\mathbf{u}_{3\parallel} \coloneqq (\mathbf{u}_3|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3|\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

och finner

$$\mathbf{u}_{3\perp} \coloneqq \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3\parallel} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(alltså låg inte $\mathbf{u}_3$ i $\mathbb{W}$!). Normering ger

$$\mathbf{f}_3 \coloneqq \frac{1}{\|\mathbf{u}_{3\perp}\|}\mathbf{u}_{3\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Vi hittar på en ny vektor (som helst inte skall ligga i $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]$),

$$\mathbf{u}_4 \coloneqq (0, 1, 0, 0),$$

säg, och beräknar skuggan av $\mathbf{u}_4$ på $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]$:

$$\mathbf{u}_{4\parallel} \coloneqq (\mathbf{u}_4|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_4|\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 + (\mathbf{u}_4|\mathbf{f}_3)\mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$\mathbf{u}_{4\perp} \coloneqq \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_{4\parallel} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(alltså låg inte $\mathbf{u}_4$ i $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]$!) och vi normerar:

$$\mathbf{f}_4 \coloneqq \frac{1}{\|\mathbf{u}_{4\perp}\|}\mathbf{u}_{4\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Svar: Vektorerna $\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ är en ON-bas för $\mathbb{R}^4$, där $\mathbb{W}$ är det linjära höljet av de två första.

Deluppgift 3

Vi skall dela upp $\mathbf{u} = (-1, 1, 1, 1)$ i en del som ligger i $\mathbb{W}$ och en del som är vinkelrät mot $\mathbb{W}$. Vi har att skuggan av $\mathbf{u}$ på $\mathbb{W} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$ är

$$\mathbf{u}_\parallel \coloneqq (\mathbf{u}|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}|\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

så att

$$\mathbf{u}_\perp \coloneqq \mathbf{u} - \mathbf{u}_\parallel = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

är vinkelrät mot $\mathbb{W}$.

Svar: $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ där $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{W}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \perp \mathbb{W}$.