Uppgift 10.6

Betrakta hyperplanet

$$\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Inför en ny ON-bas $\underline{\mathbf{f}}$ i $\mathbb{R}^4$ i vilken $\mathbb{W} = \{\mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}}Y \in \mathbb{R}^4 : y_4 = 0\}$.

Lösning: $\mathbb{W}$ är det ortogonala komplementet till $[(1, 2, 2, 0)]$. Vi väljer därför

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$$

och sedan – på valfritt sätt – de återstående tre ON-basvektorerna. Oavsett hur dessa väljs, kommer ekvationen för $\mathbb{W}$ i den nya basen att vara precis $y_4 = 0$. För att inse detta, antag att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är en sådan bas. Då gäller att

$$(y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + y_3\mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{f}_4 = y_1(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_4) + y_2(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_4) + y_3(\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_4) = 0$$

d.v.s. *varje* vektor med $y_4 = 0$ är vinkelrät mot $(1, 2, 2, 0)$ och finns därmed i $\mathbb{W}$. Omvänt är det klart att varje vektor som är vinkelrät mot $(1, 2, 2, 0)$ måste vara en linjärkombination av $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ (för annars…).

Vi kan alltså välja återstående basvektorer hur vi vill (så länge basen blir ON). Notera att varje återstående basvektor måste tillhöra $\mathbb{W}$ (varför?). Vi kan t.ex. ta

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Om vi inte direkt ser en lämplig tredje vektor i hyperplanet, vinkelrät mot dessa två, kan vi dra till med någon vektor i hyperplanet – t.ex. $\mathbf{v} = (2,1,-2,0)$ – och sedan räta upp den med Gram-Schmidt:

$$\mathbf{v}_\perp \coloneqq \mathbf{v} - (\mathbf{v}|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 - (\mathbf{v}|\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\8\\-10\\0\end{pmatrix}.$$

[Som tur var så fanns inte vektorn vi ”drog till med” i höljet av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$, men det var ju också det troligaste.] Efter normering får vi alltså vår sista basvektor:

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\-5\\0\end{pmatrix}.$$