Uppgift 11.5

Låt $\mathbb{W}$ vara det underrum av $\mathbb{R}^4$ som är lösningsrummet till ekvationssystemet $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_2 - x_4 = 0$. Sätt $\mathbf{a} \coloneqq (1, -1, -1, -1)$ och bestäm den vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$ som minimerar $|\mathbf{u} - \mathbf{a}|$ och ange detta minsta avstånd (=avståndet mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbb{W}$).

Lösning (metod 1): $\mathbf{u}$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{a}$ på $\mathbb{W}$. För att bestämma denna bestämmer vi först en ON-bas i det tvådimensionella underrummet $\mathbb{W}$ av $\mathbb{R}^4$. Vi väljer då först en godtycklig vektor i $\mathbb{W}$, $\mathbf{w}_1 \coloneqq (1, 1, 0, 1)$, säg. Som första basvektor väljer vi

$$\mathbf{f}_1 \coloneqq \frac{1}{|\mathbf{w}_1|}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Vi utökar nu med en vektor i $\mathbb{W} \setminus [\mathbf{f}_1]$, d.v.s. en vektor i $\mathbb{W}$ som *inte* ligger i höljet $[\mathbf{f}_1]$. Vi kan t.ex. ta $\mathbf{w}_2 \coloneqq (0, 1, 1, 1)$. Vi ser att $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \neq 0$, så vi beräknar skuggan (=projektionen) av $\mathbf{w}_2$ på $[\mathbf{f}_1]$:

$$\mathbf{w}_{2\parallel} \coloneqq (\mathbf{w}_2, \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix}$$

så att en vektor i $\mathbb{W}$ som är vinkelrät mot $[\mathbf{f}_1]$ är

$$\mathbf{w}_{2\perp} \coloneqq \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_{2\parallel} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Normering ger (tänk bara bort tredjedelen!)

$$\mathbf{f}_2 \coloneqq \frac{1}{|\mathbf{w}_{2\perp}|}\mathbf{w}_{2\perp} = \frac{1}{\sqrt{15}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Vi har sålunda

$$\mathbb{W} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$$

där $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en ON-bas för $\mathbb{W}$. Vi får nu direkt att skuggan (=den ortogonala projektionen) av $\mathbf{a}$ på $\mathbb{W}$ är

$$\mathbf{u} \coloneqq (\mathbf{a}, \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{a}, \mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0.6\\-0.8\\-1.4\\-0.8\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-4\\-7\\-4\end{pmatrix}.$$

Avståndet mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbb{W}$ är därför

$$|\mathbf{a} - \mathbf{u}| = \sqrt{0.4} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Lösning (metod 2): Vi använder här teorin för minskakvadratmetoden. Vi vill hitta den $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$ som ligger närmast $\mathbf{a}$, d.v.s. vi vill hitta tal α och $\beta \in \mathbb{R}$ sådana att $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2$ ligger närmast $\mathbf{a}$, där $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är *någon* bas för $\mathbb{W}$. Vi kan t.ex. välja $\mathbf{f}_1 \coloneqq (1, 1, 0, 1)$ och $\mathbf{f}_2 \coloneqq (0, 1, 1, 1)$.

Talen α och β är precis minstakvadratlösningarna till det (överbestämda) ekvationssystemet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{=:X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:Y}.$$

Minstakvadratlösningarna är, som bekant, lösningarna till det system som erhålles om vi multiplicerar den här ekvationen med A^T från vänster. Vi får då

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

som ger $(\alpha, \beta) = (0.6, -1.4)$. Alltså är

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \\ -1.4 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Avståndet mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbb{W}$ är därför

$$|\mathbf{a} - \mathbf{u}| = \sqrt{0.4} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$