Uppgift 12.4

Deluppgift A

Vi skall lösa ekvationen

$$P(x) := \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 2 & x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning:

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 2 & x & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} + (1-x)\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

där

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x(4-x^2) - (4-x) + 2(2x-2) = -x^3 + 9x - 8$$

och

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = x(x-4) - 2(2x-2) + (4-1) = x^2 - 8x + 7$$

så att

$$P(x) = (x-1)[-x^3 + 9x - 8] + (1-x)[x^2 - 8x + 7] = -x^4 + 18x^2 - 32x + 15 =$$
$$= -(x-3)(x-1)^2(x+5).$$

Alltså är

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5, 1, 3\}$$

(där ettan är en dubbelrot).

Deluppgift B

$$\begin{vmatrix} 2-t & -2 & -1 \\ -2 & 2-t & 1 \\ -1 & 1 & 5-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 5-t \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5-t \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 2-t \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2-t)[(2-t)(5-t) - 1] + 2(-2(5-t) + 1) - \big(-2 + (2-t)\big) =$$
$$= -t^3 + 9t^2 - 18t = -t(t-3)(t-6) = 0 \Leftrightarrow t \in \{0, 3, 6\}.$$