Uppgift 12.7

Vi skall beräkna följande tre determinanter av storlek $n \geq 2$.

Deluppgift A

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Här kan vi använda definitionen av determinantbegreppet direkt. En tillåten (och nollskild) produkt är förstås x^n, längs huvuddiagonalen. Här valde vi alltså x:et (och inte 1:an) från första kolonnen.

Beträffande första kolonnen är den enda alternativa möjligheten att vi väljer 1:an, längst nere. Från första raden måste vi då också välja 1:an till höger (varför?). Övriga faktorer måste då vara precis de $n - 2$ stycken x vi har på huvuddiagonalen "i mitten". Den här tillåtna produkten blir därför, så när som på tecknet, $1 \cdot 1 \cdot x^{n-2} = x^{n-2}$.

Vi bestämmer nu tecknet hos den nyss nämnda tillåtna produkten. Från 1:an i nedre vänstra hörnet får vi $n - 2$ negativa par till x:en, och från varje x får vi ett negativt par till 1:an längst uppe till höger. Hittills har vi alltså $2(n - 2)$ negativa par, men sedan har vi kvar paret som består av de två ettorna. Sålunda har vi $2(n - 2) + 1$ negativa par, d.v.s. ett *udda* antal negativa par. Determinanten är därför

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = x^n - x^{n-2}.$$

Deluppgift B

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Vi byter ut varje rad (förutom den sista) mot aktuella raden minus sista raden:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Vi multiplicerar nu de $n - 1$ första raderna med -1:

$$\begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Vi har nu bara en (nollskild) tillåten produkt, nämligen

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1 = n!.$$

Alltså har vi funnit

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$$

Deluppgift C

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

Vi byter ut varje rad (förutom den sista) mot aktuell rad minus sista raden:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & b-a \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & b-a \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & b-a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

Vi multiplicerar de $n-1$ första raderna med b och sista raden med $a-b$:

$$\frac{1}{b^{n-1}(a-b)} \begin{vmatrix} b(a-b) & 0 & 0 & \cdots & b(b-a) \\ 0 & b(a-b) & 0 & \cdots & b(b-a) \\ 0 & 0 & b(a-b) & \cdots & b(b-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(a-b) & b(a-b) & b(a-b) & \cdots & a(a-b) \end{vmatrix}.$$

Ersätt nu sista raden med sista raden minus första raden, minus andra raden, minus tredje raden, …:

$$\frac{1}{b^{n-1}(a-b)} \begin{vmatrix} b(a-b) & 0 & 0 & \cdots & b(b-a) \\ 0 & b(a-b) & 0 & \cdots & b(b-a) \\ 0 & 0 & b(a-b) & \cdots & b(b-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(a-b) & b(a-b) & b(a-b) & \cdots & a(a-b) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{b^{n-1}(a-b)} \begin{vmatrix} b(a-b) & 0 & 0 & \cdots & b(b-a) \\ 0 & b(a-b) & 0 & \cdots & b(b-a) \\ 0 & 0 & b(a-b) & \cdots & b(b-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a(a-b)-(n-1)b(b-a) \end{vmatrix}.$$

I determinanten finns bara en tillåten (nollskild) produkt, nämligen

$$[b(a-b)]^{n-1}[a(a-b)-(n-1)b(b-a)] = [b(a-b)]^{n-1}[a(a-b)+(n-1)b(a-b)] = \\ = b^{n-1}(a-b)^n[a+(n-1)b].$$

Alltså är

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \frac{1}{b^{n-1}(a-b)} b^{n-1}(a-b)^n[a+(n-1)b] = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b].$$