Uppgift 13.2

Vi skall undersöka om följande avbildningar $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är linjära eller inte. Kom ihåg definitionen:

> Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum över de reella talen. En avbildning $F:\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ säges vara **linjär** omm
>
> $$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{V}, \qquad \text{och}$$
> $$F(\alpha\mathbf{u}) = \alpha F(\mathbf{u}), \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Deluppgift A

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{a}$$

där $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ är en fix vektor. Vi prövar nu om F är linjär:

$$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{a})\mathbf{a} = [(\mathbf{u}|\mathbf{a}) + (\mathbf{v}|\mathbf{a})]\mathbf{a} = (\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{v}|\mathbf{a})\mathbf{a} = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

och

$$F(\alpha\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{a} = \alpha F(\mathbf{u}).$$

Alltså är F linjär.

Deluppgift B

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{a}$$

där $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ är en fix vektor. Vi prövar om F är linjär:

$$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{a} = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

och

$$F(\alpha\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{a} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = \alpha F(\mathbf{u})$$

så F är tydligen linjär.

Deluppgift C

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{u}$$

där $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ är en fix vektor. Vi prövar om F är linjär:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{a})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \big((\mathbf{u}|\mathbf{a}) + (\mathbf{v}|\mathbf{a})\big)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{u} + (\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{v} + (\mathbf{v}|\mathbf{a})\mathbf{u} + (\mathbf{v}|\mathbf{a})\mathbf{v} = \\ &= F(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}|\mathbf{a})\mathbf{v} + (\mathbf{v}|\mathbf{a})\mathbf{u} + F(\mathbf{v}) \neq F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

så att F uppenbarligen *inte* är linjär.