Uppgift 13.3

Låt $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på normalen genom origo till planet $x + y + z = 0$. Vi skall bestämma matrisen för G i standardbasen.

Det räcker med att bestämma bilderna $G(\mathbf{e}_1), G(\mathbf{e}_2), G(\mathbf{e}_3)$ av basvektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Normalen genom origo är det linjära höljet

$$N = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

i vilket

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

är en ON-bas. Alltså är

$$\begin{aligned} G(\mathbf{e}_1) &= (\mathbf{e}_1|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \\ G(\mathbf{e}_2) &= (\mathbf{e}_2|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \\ G(\mathbf{e}_3) &= (\mathbf{e}_3|\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Då har vi alltså hittat matrisen för G i standardbasen:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$