Uppgift 13.6

Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som har matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. Vi skall bestämma en ny bas $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ för rummet i vilken F har matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Enligt den **första** kolonnen i $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ så har bilden $F(\mathbf{f}_1)$ av första basvektorn $\mathbf{f}_1$ koordinaterna $(0, 0, 0)$ i $\mathbf{f}$-basen, d.v.s. $F(\mathbf{f}_1) = 0 \cdot \mathbf{f}_1 + 0 \cdot \mathbf{f}_2 + 0 \cdot \mathbf{f}_3$. Om vi antar att

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

så gäller alltså

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

där vi använder standardbasen både för avbildningsmatrisen, den sökta basvektorn, och nollvektorn. Detta är ett linjärt ekvationssystem som har en lösning (inte unik, dock!)

$$(x, y, z) = (1, 0, 1).$$

Därför kan vi välja

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den **andra** kolonnen i $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ säger att bilden $F(\mathbf{f}_2)$ av andra basvektorn $\mathbf{f}_2$ har koordinaterna $(1, 0, 0)$ i $\mathbf{f}$-basen, d.v.s. $F(\mathbf{f}_2) = 1 \cdot \mathbf{f}_1 + 0 \cdot \mathbf{f}_2 + 0 \cdot \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1$.Om vi ansätter

$$\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

så gäller alltså

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eftersom $\mathbf{f}_1 = (1, 0, 1)$.[1] En lösning är

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Den **sista (d.v.s. tredje)** kolonnen i $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ säger att bilden $F(\mathbf{f}_3)$ av den tredje basvektorn $\mathbf{f}_3$ har koordinaterna $(0, 0, -1)$ i $\mathbf{f}$-basen, d.v.s. $F(\mathbf{f}_3) = 0 \cdot \mathbf{f}_1 + 0 \cdot \mathbf{f}_2 - 1 \cdot \mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_3$. Den tredje basvektorn avbildas alltså på minus sig själv! Om vi ansätter

$$\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

så har vi sålunda

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & -1 & -2\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}$$

som t.ex. satisfieras av

$$\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Svar: I basen $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ har den linjära avbildningen F den angivna matrisen.

[1] Det vore naturligtvis uppenbart fel att sätta $(1 \quad 0 \quad 0)^T$ i högerledet, eftersom det är koordinaterna för $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}$-basen (så klart!), inte i $\mathbf{e}$-basen. Vi har ju $\mathbf{f}_1 = (1,0,1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.