Uppgift 15.4

Betrakta deriveringsoperatorn $D: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ som till varje polynom $p(t) \in \mathbb{P}_n$ ordnar derivatan $\frac{d}{dt}p(t) \in \mathbb{P}_n$. Vi antar att $n \geq 1$.

Nollrummet består av de polynom som avbildas på nollpolynomet $0 \in \mathbb{P}_n$. Men vi vet ju att de enda polynom $p(t) \in \mathbb{P}_n$ som avbildas på 0 är de konstanta polynomen (d.v.s. reella tal), så att

$$\begin{aligned} N(D) &= \{c : c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \mathbb{R} = [(1)] = \\ &= \mathbb{P}_0 = [t^0] \end{aligned}$$

(beroende hur man vill se på det) och $\dim N(D) = 1$.

Värderummet är mängden av alla bilder vi får ut. Men deriverar vi ett n-tegradspolynom så erhåller vi ett $(n-1)$-tegradspolynom, och vi kan erhålla varje sådant polynom. Därför är

$$V(D) = \mathbb{P}_{n-1}.$$

Eftersom $n \geq 1$ så är vidare

$$V(D) = \mathbb{P}_{n-1} \supseteq \mathbb{P}_0 = N(D)$$

så nollrummet är ett underrum till värderummet.

(Låt oss betrakta ett konkret exempel för att råda bot på det "abstrakthet" som föreligger. T.ex. om $n = 5$ så är $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_5$ mängden av alla polynom av grad fem eller lägre, som ju naturligt bildar ett vektorrum av dimension 6. Ett godtyckligt polynom i $\mathbb{P}_5$ kan skrivas

$$p(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0t^0.$$

Av alla polynom i $\mathbb{P}_5$ är det bara de konstanta polynomen

$$0t^5 + 0t^4 + 0t^3 + 0t^2 + 0t^1 + a_0t^0$$

som avbildas på nollpolynomet

$$0t^5 + 0t^4 + 0t^3 + 0t^2 + 0t^1 + 0t^0.$$

Det är också klart att $V(D) = \mathbb{P}_4$ i det här fallet.)