Uppgift 15.5

Avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

medan $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är ortogonalprojektion på linjen $[(1,1,1)]$. Vi skall bestämma $V(F) \cap N(G)$.

Lösning: Värderummet

$$V(F) = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{(t.ex.)}$$

eftersom kolonnerna i A är linjärt beroende med exakt ett löjligt element. $V(F)$ är alltså ett plan genom origo i rummet, med normal

$$\mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och därmed ekvation

$$x - y - z = 0.$$

Nollrummet $N(G)$ består av de vektorer som avbildas på nollvektorn under G, d.v.s. alla vektorer (punkter) i planet

$$x + y + z = 0$$

som ju har linjen $[(1,1,1)]$ som sin normal genom origo (detta är trivialt om man blundar och ritar upp situationen!). Det sökta snittet är därför snittet mellan dessa två plan, d.v.s.

$$V(F) \cap N(G) = \left\{ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Addition av de två ekvationerna ger

$$2x = 0$$

d.v.s. $x = 0$. Subtraktion ger

$$-2y - 2z = 0$$

d.v.s. $y = -z =: t$. Alltså är

$$V(F) \cap N(G) = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

som ju är en linje genom origo.