Uppgift 16.6

En parallellepiped har ett hörn i origo och tre närliggande hörn i $(-4, 7, -4)$, $(3, -6, 2)$ samt $(1, 1, 2)$. Låt ℓ vara en den räta linje som passerar genom origo och $\mathbf{p} = (-4, 8, -4)$. Vi skall bestämma var ℓ skär parallellepipedens sidoytor.

För att göra problemet mer transparent byter vi från standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ till en ny bas $\underline{\mathbf{f}}$ med sambandet

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

d.v.s. vi använder parallellepipedens tre kantvektorer som våra nya basvektorer. I basen $\underline{\mathbf{f}}$ heter med andra ord parallellepipedens kantvektorer $\underline{\mathbf{f}}(1 \quad 0 \quad 0)^T$, $\underline{\mathbf{f}}(0 \quad 1 \quad 0)^T$ och $\underline{\mathbf{f}}(0 \quad 0 \quad 1)^T$. Rent ”algebraiskt” har vi alltså att göra med enhetskuben. Samtidigt är

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

där vi använt koordinatsambandet $\mathbf{p} = \underline{\mathbf{e}}X_{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\mathbf{f}}X_{\underline{\mathbf{f}}} \Rightarrow X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}X_{\underline{\mathbf{e}}}$. Vi kan nu parametrisera ℓ genom

$$\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = t\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det är klart att ℓ skär parallellepipedens sidoytor i origo, d.v.s. när $t = 0$. Men vi kommer också att träffa på den sidoyta som är en del av planet $y_1 = 1$ (varför just den?), vilket sker när $3t = 1$, d.v.s. när $t = 1/3$. Skärningspunkten heter alltså

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och koordinatsambandet ger

$$\mathbf{x} = \frac{8}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Svar: ℓ skär parallellepipedens sidoytor i origo och i punkten $\frac{8}{3}(-1, 2, -1)$.