Uppgift 18.4

Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi skall först bestämma egenvärden och egenrum till F; sedan skall vi, om möjligt, skapa en ny ON-bas för planet bestående av egenvektorer. Om det inte går vill vi åtminstone använda så många egenvektorer som möjligt som basvektorer. Egenvärdena λ löser sekularekvationen

$$\det\left(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda E\right) = 0$$

där E är enhetsmatrisen av format 2×2. Vi får alltså

$$\det\left(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Vi erhåller alltså ett enda egenvärde, som då (naturligtvis) har *algebraisk multiplicitet* två. Det egenrum som hör till egenvärdet har alltså dimension (den så kallade *geometriska multipliciteten*) två eller lägre (d.v.s. två eller ett). Vi bestämmer egenrummet E_1 för $\lambda = 1$:

$$\underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \left(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda E\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$$

så egenrummet är

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

och $\dim E_1 = 1$. Tyvärr kan vi alltså endast finna *en* linjärt oberoende egenvektor till F. Eftersom vi önskar en ON-bas väljer vi

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi tvingas nu använda en vektor som *inte* är en egenvektor till F som vår andra basvektor. Ett naturligt val är

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Basbytesmatrisen från $\underline{\mathbf{e}}$ till $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)$ är

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

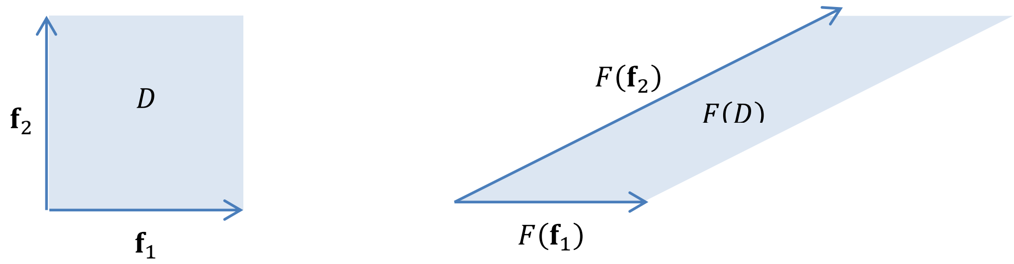
så F:s matris i den nya basen $\underline{\mathbf{f}}$ är

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T = [T \text{ ortogonal}] = T^T A_{\underline{\mathbf{e}}} T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom den nya basen åtminstone har en egenvektor som basvektor (nämligen den första), blir åtminstone den första kolonnen i $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ fin. Vi kan nu enkelt göra en geometrisk tolkning av F (är det en rotation, en skalning, en skjuvning, en spegling, en kombination av …?), genom att i det nya koordinatsystemet titta på bilden av enhetskvadraten[1] D. Eftersom F är linjär räcker det med att titta på bilderna av kantvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.[2] Vi har

$$F(\mathbf{f}_1) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad F(\mathbf{f}_2) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

så att avbildningen tydligen är en *skjuvning*:[3]



[1] Enhetskvadraten är den parallellogram som genereras av de två basvektorerna. I standarbasen i $\mathbb{R}^2$ är alltså enhetskvadraten punktmängden $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ där $\times$ är den så kallade *kartesiska produkten* mellan två mängder.

[2] En godtycklig punkt $\mathbf{x} = \underline{\mathbf{f}}(x \quad y)^T \in D$ kan ju parametriseras $\underline{\mathbf{f}}(x \quad y)^T = \underline{\mathbf{f}}(s \quad t)^T = s\mathbf{f}_1 + t\mathbf{f}_2$ där $s, t \in [0,1]$ så att en godtycklig punkt i bilden $F(\mathbf{x}) = F(s\mathbf{f}_1 + t\mathbf{f}_2) = sF(\mathbf{f}_1) + tF(\mathbf{f}_2)$ tack vare lineariteten. En godtycklig punkt i enhetskvadraten D avbildas alltså på en punkt i den parallellogram som genereras av bilderna av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

[3] Egentligen är ju $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en funktion som tar in *vektorer*, så skrivsättet $F(D)$, där D är en *mängd* av vektorer är ju lite oegentligt. Vad vi menar är dock att vi applicerar F på varje vektor i D, d.v.s. $F(D) = \{F(\mathbf{v}): \mathbf{v} \in D\}$.