Uppgift 19.3

Vi skall bestämma största och minsta värdet av den kvadratiska formen $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierad av

$$Q(\mathbf{u}) = x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2^2, \qquad \mathbf{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

på enhetscirkeln samt ange var på cirkeln extremvärdena antas.

Lösning:

Vi använder resultatet

$$\lambda_{\min}|\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{\max}|\mathbf{u}|^2, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$$

där $\lambda_{\min}$ och $\lambda_{\max}$ är det minsta respektive största egenvärdet till den tillhörande symmetriska avbildningen, med likhet omm $\mathbf{u}$ är en egenvektor till respektive egenvärde. Eftersom

$$Q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

så är den tillhörande matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 2 \end{pmatrix}$$

som har egenvärden

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{5}{2}$$

och tillhörande egenrum

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right], \qquad E_2 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right].$$

Eftersom vi bara betraktar Q:s värden på enhetscirkeln (d.v.s. $|\mathbf{u}| = 1$) så gäller

$$\frac{1}{2} \leq Q(\mathbf{u}) \leq \frac{5}{2}.$$

Minsta värdet $\frac{1}{2}$ erhålles då $\mathbf{u} \in E_1$. Eftersom E_1 är en rät linje genom origo så skär E_1 enhetscirkeln i precis de två punkter $t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$, som uppfyller

$$\left|t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 1.$$

Vi får $t = \pm 1/2$, d.v.s.

$$\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{samt} \quad -\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Största värdet $\frac{5}{2}$ erhålles för de $\mathbf{u}$ på enhetscirkeln sådana att $\mathbf{u} \in E_2$, d.v.s. för de $t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \in E_2$ som uppfyller

$$\left| t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = 1,$$

d.v.s. de två punkterna

$$\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad -\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$