Uppgift 19.5

Vi skall bestämma arean av det område som innesluts av kurvan

$$17x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 20.$$

Lösning: Vänsterledet i ekvationen är en kvadratisk form med matris

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

och har egenvärden

$$\lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = 20$$

och motsvarande egenrum

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right], \qquad E_2 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Om vi byter till ON-egenbasen

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så erhåller vi ett nytt koordinatsystem (*som ju bara är roterat i förhållande till standardbasen*) i vilket kurvan har ekvationen

$$5y_1^2 + 20y_2^2 = 20,$$

d.v.s.

$$\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1}\right)^2 = 1$$

och det är uppenbart att kurvan är en ellips med axlar parallella med koordinataxlarna (de nya!) och med halvaxellängder 2 respektive 1 (rita!). Alltså är den sökta arean

$$A = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi.$$

Det är nu uppenbart att de punkter som ligger närmast origo är

$$\pm\mathbf{f}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

medan de punkter som ligger längst ifrån origo är

$$\pm 2\mathbf{f}_1 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$