Uppgift 19.6

Betrakta ytan

$$3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_3 = 1.$$

Vi skall undersöka vilka avstånd till origo som punkter på ytan kan ha. Ytan är nivåytan $Q(\mathbf{u}) = 1$ till den kvadratiska formen $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definierad av

$$Q(\mathbf{u}) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_3, \qquad \forall \mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Till Q hör den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

med egenvärden

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 0$$

och motsvarande egenrum

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \qquad E_2 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \qquad E_3 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right].$$

Vi inför sålunda en ON-egenbas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$ genom att sätta

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu uttrycka Q i den nya basen:

$$Q(\mathbf{u}) = 4y_1^2 + y_2^2, \qquad \forall \mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

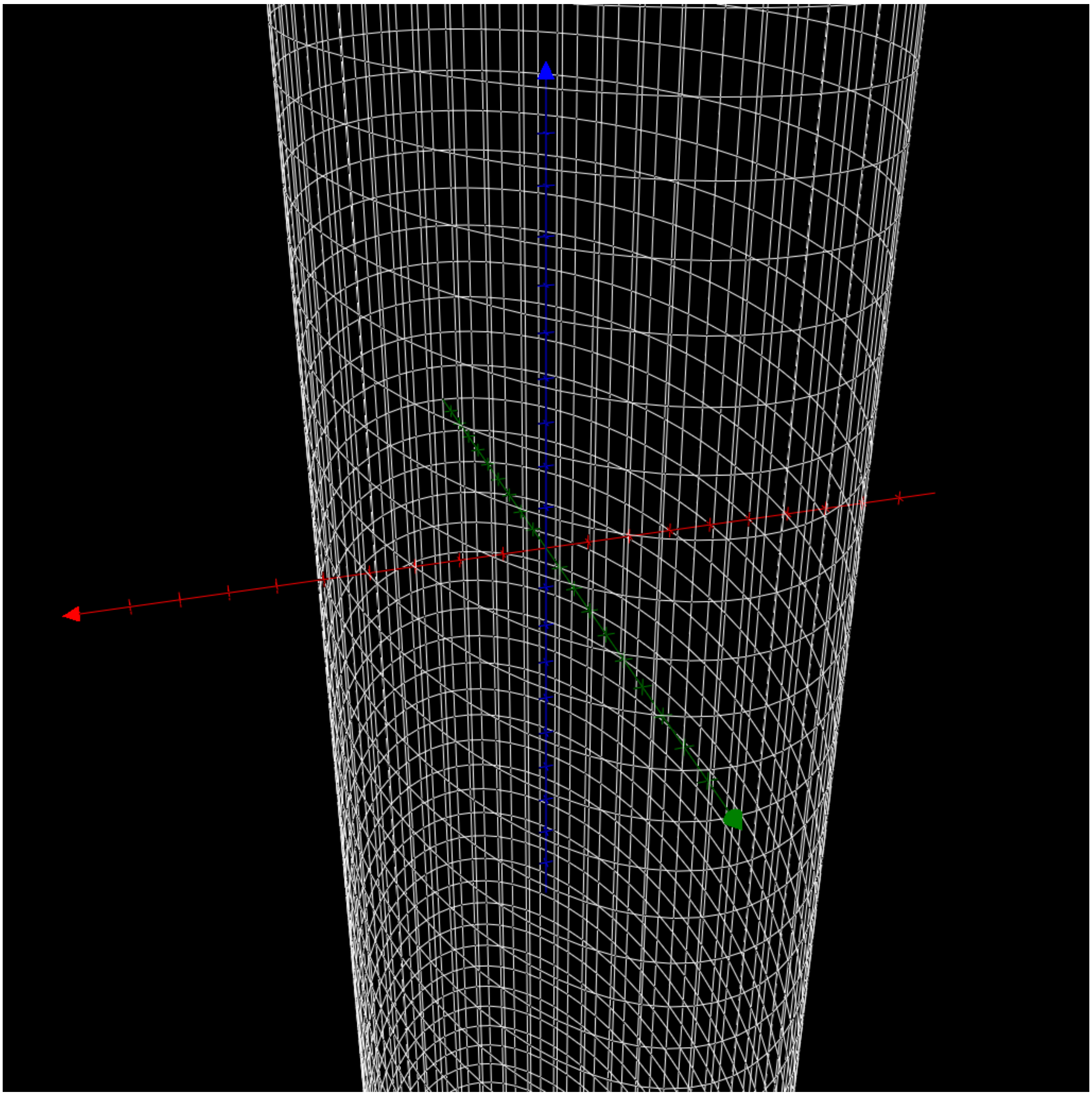
I vårt nya koordinatsystem (som ju bara är roterat i förhållande till det gamla) heter alltså ytan

$$4y_1^2 + y_2^2 = 1$$

som också kan skrivas

$$\left(\frac{y_1}{1/2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1}\right)^2 = 1.$$

Vi har alltså en cylinder längst y_3-axeln. Halvaxlarnas längder är $1/2$ (i y_1-led) respektive 1 (i y_2-led). Det är nu trivialt att rita ytan (cylindern) i vårt nya koordinatsystem:



I bilden ovan är y_1-axeln röd, y_2-axeln grön och y_3-axeln blå, och skalan på axlarna är $\frac{1}{10}$. Notera att cylindern går längs y_3-axeln och att den sträcker sig från -0.5 till $+0.5$ längs y_1-axeln och från -1 till $+1$ längst y_2-axeln. Det är nu uppenbart att minsta avståndet till origo är $\frac{1}{2}$ och inträffar i punkterna

$$\pm\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 = \pm\frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Något största avstånd från en punkt på ytan till origo finns inte, utan hur stora avstånd som helst kan erhållas.