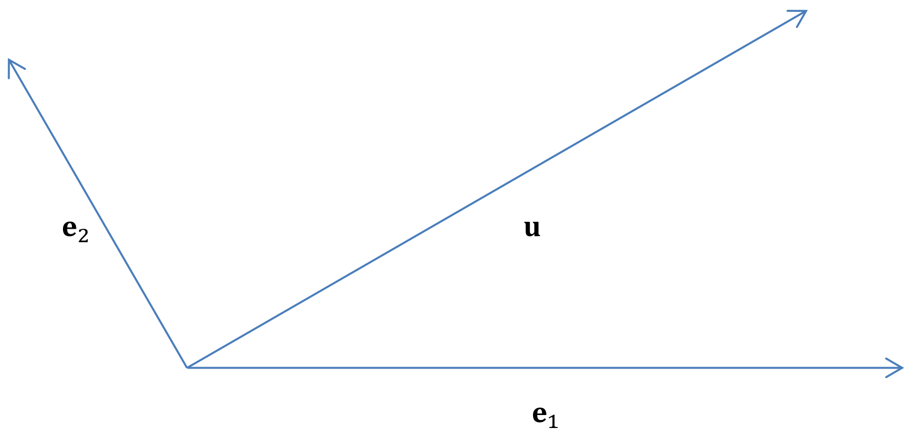
Uppgift 2.7

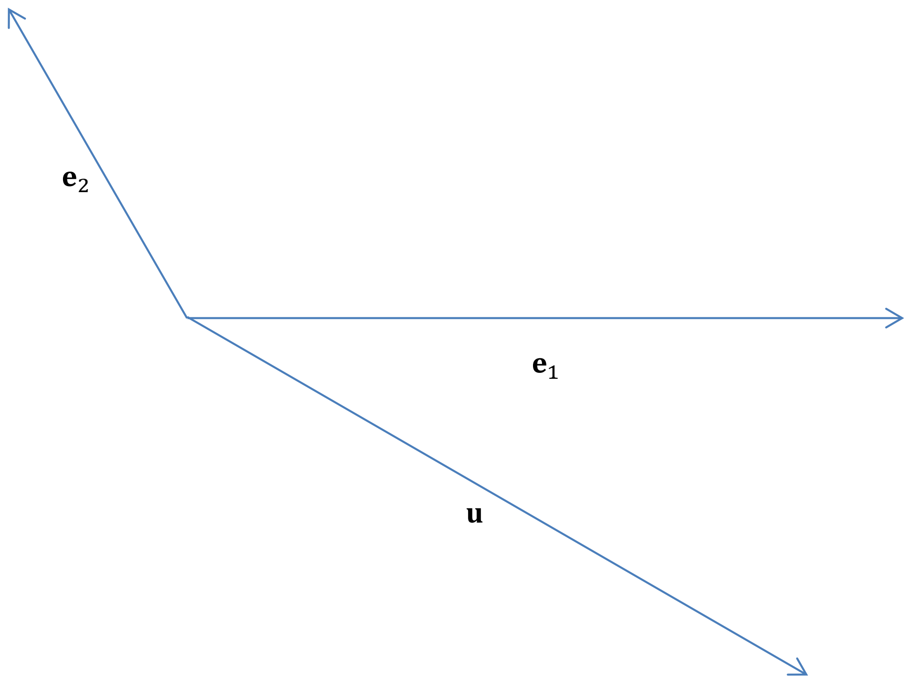
Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ligger i samma plan, $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 1$, $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ bildar vinkeln 120° och $\mathbf{u}$ och $\mathbf{e}_1$ bildar vinkeln 30°. Vi skall skriva $\mathbf{u}$ som en linjärkombination av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

Lösning: Av texten framgår att vi har någon av de två situationerna nedan.

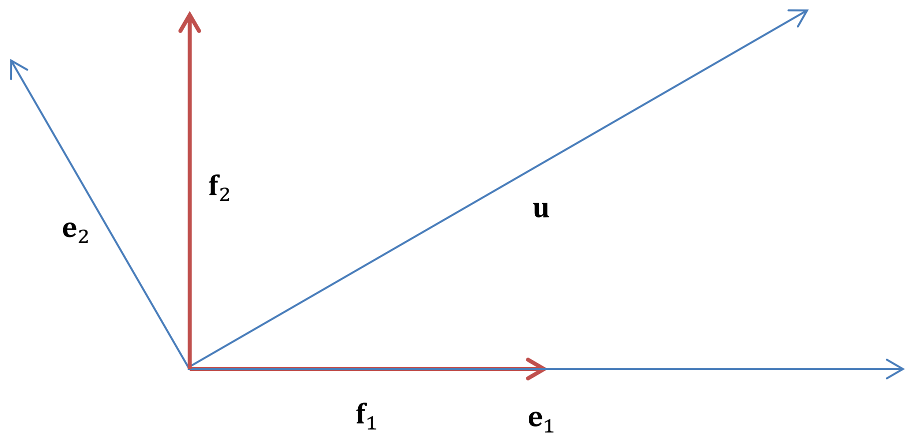
FALL 1:



FALL 2:



Det finns flera sätt att lösa uppgiften. Det kanske lättaste (och framförallt mest systematiska) sättet är att införa en lämplig ON-bas i planet, d.v.s. en bas bestående av två vinkelräta vektorer av längd 1. Låt oss göra så, genom att införa basen $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)$ där $\mathbf{f}_1$ pekar rakt åt höger och $\mathbf{f}_2$ pekar rakt uppåt. I FALL 1 får vi då följande situation:



där vi enkelt ser att

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= 2\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\binom{2}{0} \\
\mathbf{e}_2 &= -\sin 30^\circ\,\mathbf{f}_1 + \cos 30^\circ\,\mathbf{f}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u} &= 2\cos 30^\circ\,\mathbf{f}_1 + 2\sin 30^\circ\,\mathbf{f}_2 = \sqrt{3}\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}}\binom{\sqrt{3}}{1}.
\end{aligned}$$

Det vi vill göra är att skriva $\mathbf{u}$ som en linjärkombination av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Med andra ord vill vi finna tal λ och μ sådana att

$$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2,$$

d.v.s.

$$\underline{\mathbf{f}}\binom{\sqrt{3}}{1} = \lambda\underline{\mathbf{f}}\binom{2}{0} + \mu\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.v.s.} \quad \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2\lambda + \frac{1}{2}\mu \\ 1 - 0\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

som är ett helt vanligt ekvationssystem med två ekvationer i två obekanta:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 2\lambda - \frac{1}{2}\mu \\
1 &= 0\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu.
\end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger direkt $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}$ varefter den första ekvationen ger

$$2\lambda = \sqrt{3} + \frac{1}{2}\mu = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Alltså är

$$\mathbf{u} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2.$$

FALL 2 löses på precis samma sätt, och lämnas som övning.