Uppgift 20.4

Vi skall bestämma nollställena till den kvadratiska formen $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definierad av

$$Q(\mathbf{u}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3, \qquad \forall \mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Lösning (metod 1):

Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= \big(x_1 + (2x_2 + x_3)\big)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - (2x_3)^2 + 4x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 \end{aligned}$$

så tydligen är

$$Q(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

d.v.s. på skärningslinjen mellan de två planen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ och $x_2 - 2x_3 = 0$ genom origo. Skärningslinjen är förstås vinkelrät mot båda planen, så dess riktning är $(1, 2, 1) \times (0, 1, -2) = (-5, 2, 1)$ och därmed är

$$Q(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Lösning (metod 2):

Den kvadratiska formen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

med egenvärden $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 5$ och $\lambda_3 = 0$ och motsvarande egenrum

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \qquad E_2 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right], \qquad E_3 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Vi kan alltså införa en ON-egenbas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$ där

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I basen $\underline{\mathbf{f}}$ är

$$Q(\mathbf{u}) = 6y_1^2 + 5y_2^2, \qquad \forall \mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sålunda är

$$Q(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0$$

så att $Q(\mathbf{u})$ är noll om och endast om vi befinner oss på $\mathbf{f}_3$-axeln, d.v.s.

$$Q(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in [\mathbf{f}_3] = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] (= E_3).$$