Uppgift 20.6

Vi skall bestämma snittet mellan de två ytorna

$$\begin{aligned} S_1:&\quad x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3=1 \\ S_2:&\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Lösning:

S_2 är uppenbarligen en sfär kring origo med radie $1/3$. Däremot är det mycket svårt att säga vad S_1 är för sorts yta (cylinder, ellipsoid, paraboloid, hyperboloid, …). Vi väljer då att byta till ett nytt ON-koordinatsystem som passar bra överens med S_1. Notera att S_1 är nivåytan $Q(\mathbf{u})=1$ till den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{u})=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3, \qquad \forall \mathbf{u}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

som i standardbasen ges av matrisen

$$\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&5&-3\\2&-3&5\end{pmatrix}.$$

Den här matrisen har egenvärden

$$\lambda_1=9, \qquad \lambda_2=2, \qquad \lambda_3=0$$

och motsvarande egenrum

$$E_1=\left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right], \qquad E_2=\left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right], \qquad E_3=\left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}\right].$$

Vi inför sålunda en ON-bas $\underline{\mathbf{f}}=(\mathbf{f}_1\quad \mathbf{f}_2\quad \mathbf{f}_3)$ av egenvektorer genom att

$$\mathbf{f}_1=\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3=\frac{1}{\sqrt{18}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Noter att den nya basen bara är roterad i förhållande till standardbasen. I den nya basen är

$$Q(\mathbf{u})=9y_1^2+2y_2^2, \qquad \forall \mathbf{u}=\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

så att S_1 har ekvationen

$$9y_1^2+2y_2^2=1$$

samtidigt som S_2 fortfarande har ekvationen

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{9}$$

(varför?). Ekvationen för S_1 kan skrivas

$$\left(\frac{y_1}{1/3}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1/\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

så uppenbarligen är S_1 en elliptisk cylinder längs y_3-axeln som sträcker mellan $\pm\frac{1}{3}$ i y_1-led och $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ i y_2-led. Samtidigt är S_2 en sfär med radie $\frac{1}{3}$ kring origo. Det är nu mycket enkelt att rita en bild som innehåller S_1 och S_2 och de nya koordinataxlarna. Eftersom $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ligger sfären innanför cylindern, men det är nätt och jämnt att den får plats. Sfären tangerar cylindern i punkterna

$$\pm\frac{1}{3}\mathbf{f}_1 = \pm\frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Dessa två punkter är alltså de sökta skärningspunkterna.

I bilden nedan är skärningspunkterna markerade i gult. Skalan på axlarna är $\frac{1}{10}$. Den röda axeln är y_1-axeln, den gröna är y_2-axeln och den blåa är y_3-axeln.