Uppgift 20.7

Låt

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

vara enhetsvektorer i rummet. Vi skall bestämma största möjliga vinkel mellan dem.

Lösning:

Först noterar vi att $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ så att uppgiften är rimlig. Skalärprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}|\mathbf{v}) &= x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 = \\ &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

där $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Alltså är

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arccos(x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3).$$

Eftersom arccos är en strängt avtagande funktion är det klart att vinkeln är som störst när $x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3$ är som minst. Men

$$Q(\mathbf{x}) = x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3, \qquad \forall\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

är en kvadratisk form, så satsen

$$\lambda_{\min}|\mathbf{x}|^2 \leq Q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}|\mathbf{x}|^2, \qquad \forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

gäller, där $\lambda_{\min}$ och $\lambda_{\max}$ är minsta respektive största egenvärdet till den symmetriska avbildning som hör till Q. I vårt fall är dessutom $|\mathbf{x}| = 1$, så att

$$\lambda_{\min} \leq Q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}.$$

Vår kvadratiska form har matrisen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och vi finner $\lambda_{\min} = -\frac{1}{2}$. Alltså är

$$-\frac{1}{2} \leq Q(\mathbf{x}).$$

[Extremvärdet $-\frac{1}{2}$ antages också, nämligen då $\mathbf{x}$ är en egenvektor till $\lambda_{\min}$. Eftersom egenrummet är ett vektorrum av åtminstone dimension 1 är det klart att det skär enhetssfären.] Den största vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är alltså

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\max} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = 120°.$$