Uppgift 22.2

Låt $(x_k)_0^\infty$ och $(y_k)_0^\infty$ vara två talföljder som uppfyller

$$\begin{aligned} x_k &= 0.8x_{k-1} + 0.3y_{k-1} \\ y_k &= 0.2x_{k-1} + 0.7y_{k-1} \end{aligned}$$

där x_0 och y_0 är givna konstanter. Vi skall visa att

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

är parallell med en och samma vektor oberoende av startvärdena x_0 och y_0.

Lösning:

Sätt

$$\mathbf{x}_k = \underline{\mathbf{e}} X_{k,\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

så att vårt system kan skrivas

$$X_{k,\underline{\mathbf{e}}} = A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{k-1,\underline{\mathbf{e}}},$$

d.v.s.

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Matrisen $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ har egenvärden

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

och motsvarande egenrum

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \qquad E_2 = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Vi inför sålunda en egenbas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)$ till $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ genom att sätta

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I den nya basen är avbildningsmatrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

så om

$$\mathbf{x}_k = \underline{\mathbf{f}} X_{k,\underline{\mathbf{f}}} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} x_k' \\ y_k' \end{pmatrix}$$

så kan vårt system skrivas

$$X_{k,\underline{\mathbf{f}}} = A_{\underline{\mathbf{f}}} X_{k-1,\underline{\mathbf{f}}},$$

d.v.s.

$$\begin{pmatrix} x'_k \\ y'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{k-1} \\ y'_{k-1} \end{pmatrix}.$$

[Notera att $\begin{pmatrix} x'_k \\ y'_k \end{pmatrix}$ är koordinatmatrisen för vektorn $\mathbf{x}_k = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$. Primtecknen har alltså inget med derivator att göra!] Vi har alltså kopplat isär ekvationerna, och de är nu direkt lösbara:

$$\begin{aligned} x'_k &= x'_{k-1} \Rightarrow x'_k = A \\ y'_k &= \frac{1}{2} y'_{k-1} \Rightarrow y'_k = B \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{B}{2^k} \end{aligned}$$

där $A, B \in \mathbb{R}$ är konstanter. Notera att $(x'_k)_0^\infty$ är en konstant talföljd medan $(y'_k)_0^\infty$ är en följd som halverar elementets värde varje gång vi ökar k. Vi har alltså funnit lösningen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} x'_k \\ y'_k \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} A \\ 2^{-k} B \end{pmatrix} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2) \begin{pmatrix} A \\ 2^{-k} B \end{pmatrix} = A\mathbf{f}_1 + 2^{-k} B \mathbf{f}_2 = A \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^{-k} B \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{3A}{2} - 2^{-k} B \\ A + 2^{-k} B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret

$$\mathbf{x}_0 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{3A}{2} - B \\ A + B \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ger

$$\begin{aligned} A &= 0.4 x_0 + 0.4 y_0 \\ B &= -0.4 x_0 + 0.6 y_0 \end{aligned}$$

så att

$$\mathbf{x}_k = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{3A}{2} - 2^{-k} B \\ A + 2^{-k} B \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(0.4 x_0 + 0.4 y_0) - 2^{-k}(-0.4 x_0 + 0.6 y_0) \\ 0.4 x_0 + 0.4 y_0 + 2^{-k}(-0.4 x_0 + 0.6 y_0) \end{pmatrix}.$$

Det är klart att

$$\mathbf{x}_k \to \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(0.4 x_0 + 0.4 y_0) \\ 0.4 x_0 + 0.4 y_0 \end{pmatrix}$$

då $k \to \infty$. Men

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}(0.4x_0 + 0.4y_0)\\ 0.4x_0 + 0.4y_0\end{pmatrix} = (0.4x_0 + 0.4y_0)\underline{\mathbf{e}}\binom{3/2}{1} = \frac{1}{2}(0.4x_0 + 0.4y_0)\underline{\mathbf{e}}\binom{3}{2}$$

är parallell med vektorn

$$\underline{\mathbf{e}}\binom{3}{2}$$

oberoende av startvärdena x_0 och y_0, Q.E.D.