Uppgift 22.3

Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en symmetrisk linjär avbildning vars värderum spänns upp av $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 0)$ som båda är egenvektorer med egenvärde 1. Vi skall bestämma F:s matris i standardbasen.

Lösning:

Inför en ny ON-bas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$ för rummet genom att sätta

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Lägg märke till att $V(F) = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$ är ett plan i rummet ($\mathbb{R}^3$).

Det är klart att F:s matris i basen $\underline{\mathbf{f}}$ har formen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & ?\\0 & 1 & ?\\0 & 0 & ?\end{pmatrix}$$

eftersom både $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är egenvektorer med egenvärde 1. Avbildningen F är symmetrisk. Det betyder att i varje ON-bas är avbildningens *matris* symmetrisk. $\underline{\mathbf{f}}$ är en ON-bas. Alltså kan vi säga lite mer om matrisen i den här basen. Den måste nämligen se ut så här:

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

för något tal $a \in \mathbb{R}$. Om $a \neq 0$ så har $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ full rang. I synnerhet är värderummet

$$V(F) = \left[\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \mathbb{R}^3$$

hela rummet, vilket strider mot det faktum att värderummet bara är ett plan i $\mathbb{R}^3$, nämligen planet $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$. Därför måste $a = 0$. Vi har alltså bestämt matrisen $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ för F i den nya basen. I standarbasen är sålunda matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{-1} = [T \text{ ortogonal}] = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

där T (förstås) är basbytesmatrisen

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Notera att $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är symmetrisk, som den måste vara, eftersom den är matris åt en symmetrisk avbildning i en ON-bas.