Uppgift 3.5b

Ange de enhetsvektorer som bildar vinkeln 45° med $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Lösning: Låt (a, b, c) vara en vektor som löser problemet. Då är

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 = \\ = a + b$$

och

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 = \\ = b + c$$

och, så klart,

$$\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Vi har alltså tre ekvationer i tre obekanta, vilket är precis lagom:

$$a + b = 1 \\ b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Första ekvationen ger $b = 1 - a$, och andra ger $c = 1 - b = 1 - (1 - a) = a$ så att tredje ger

$$a^2 + (1 - a)^2 + a^2 = 1$$

som trivialt ger $a = 0$ eller $a = \frac{2}{3}$. Sålunda är $b = 1$ eller $\frac{1}{3}$ och $c = 0$ eller $\frac{2}{3}$.

Svar: Det finns två sådana vektorer, nämligen $(0,1,0)$ och $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.