Uppgift 3.6

Bestäm de vektorer som bildar samma vinkel med $(2, 1, 2)$ och $(3, 0, 4)$.

Lösning: Antag att en sådan vektor heter (a, b, c) och att vinkeln är α. Då är

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot 3 \cdot \cos\alpha = $$
$$= 2a + b + 2c$$

och

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot 5 \cdot \cos\alpha = $$
$$= 3a + 4c.$$

Detta är två ekvationer i tre obekanta, så vi bör få ett *plan* i rummet. Multiplicera första ekvationen med 5 och andra med 3, så lyder ekvationerna

$$15\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cos\alpha = 10a + 5b + 10c$$
$$15\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cos\alpha = 9a + 12c$$

som implicerar

$$10a + 5b + 10c = 9a + 12c$$

som kan förenklas till

$$a + 5b - 2c = 0$$

som mycket riktigt är ett plan genom origo.

Svar: Alla vektorer (a, b, c) där $a + 5b - 2c = 0$

alternativt

Svar: Ortsvektorerna till punkterna i planet $x + 5y - 2z = 0$

alternativt (eftersom man ofta identifierar punkter och respektive ortsvektorer)

Svar: Alla vektorer i planet $x + 5y - 2z = 0$.