Uppgift 4.5

Punkten $P = (4, 2, -2)$ och planet $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 2\}$ är givna. Bestäm punktens ortogonala projektion i planet och beräkna punktens avstånd till planet. Bestäm också punktens spegelpunkt i planet.

Lösning: Det vore väldigt smidigt om vi kände till den räta linje L som går genom P och skär Π under rät vinkel, så vi bestämmer den!

Eftersom L går igenom punkten $P = (4,2,-2)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$ så är

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

parameterformen för L (d.v.s. $L = \mathbf{r}(\mathbb{R})$ är värdemängden till funktionen $\mathbf{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$). När $t = 0$ befinner vi oss i P. Vi undrar när vi krockar med Π. För att bestämma denna tidpunkt, stoppar vi in en godtycklig punkt på L (den vid tiden t) i Π:s ekvation:

$$(4 + t) - (-2 - t) = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = -2.$$

Vi ser därför att L skär Π i punkten $\mathbf{r}(-2) = (2, 2, 0)$, som alltså är P:s ortogonala projektion i Π.

Avståndet d mellan P och Π är längden av vektorn $P - \mathbf{r}(-2)$, d.v.s.

$$d = \|P - \mathbf{r}(-2)\| = \sqrt{(4-2)^2 + (2-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Eftersom $\mathbf{r}(0) = P$ och $\mathbf{r}(-2) \in \Pi$ är det klart att $\mathbf{r}(-4)$ är P:s spegelpunkt i planet. Det har att göra med det faktum, att avståndet mellan två punkter på linjen L är proportionellt mot avståndet i parametern t för linjen.

Spegelpunkten är alltså

$$\mathbf{r}(-4) = (0, 2, 2)$$

och uppgiften är till belåtenhet löst.