Uppgift 5.5

Låt $L = \Pi_1 \cap \Pi_2$ vara skärningslinjen mellan planen $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = -1\}$ och $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 1\}$ och betrakta punkten $P = (1, -4, 0)$. Bestäm P:s ortogonala projektion på L och P:s avstånd till L.

Lösning: Låt oss först bestämma L:s parameterform:

Metod 1

Vi kan förstås bestämma L:s parameterform genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x - z = 1. \end{cases}$$

Sätt $z = t$. Då ger andra ekvationen $x = 1 + t$ varefter första ekvationen ger $1 + t + 2y + t = -1$, d.v.s. $y = -1 - t$. Sålunda är linjens parameterform

$$L: \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Metod 2

Det är klart att L:s riktningsvektor är vinkelrät mot båda planens normaler, d.v.s. mot både $(1, 2, 1)$ och mot $(1, 0, -1)$. Därför är riktningsvektorn parallell med

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom linjen går genom punkten $(1, -1, 0) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, har vi således parameteriseringen

$$L: \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vill bestämma den räta linje L' som innehåller P och som skär L under rät vinkel. Notera att $P \in \Pi_2$. Alltså är L':s riktningsvektor vinkelrät både mot Π_2:s normalvektor och mot L:s riktningsvektor. Med andra ord är L':s riktningsvektor parallell med

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att den sökta linjen $L' = \mathbf{r}(\mathbb{R})$ där

$$\mathbf{r}(s) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi befinner oss i P då $s = 0$: $\mathbf{r}(0) = P$. När krockar vi med L, d.v.s. när krockar vi med Π_1? Stoppa in en godtycklig punkt $(1 + s, -4 + 2s, s) \in L'$ i Π_1:s ekvation $x + 2y + z = -1$ för att erhålla

$$1 + s + 2(-4 + 2s) + s = -1,$$

d.v.s. $s = 1$. Den ortogonala projektionen är sålunda

$$\mathbf{r}(1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avståndet mellan P och linjen är därför

$$\|\mathbf{r}(0) - \mathbf{r}(1)\| = \sqrt{(1-2)^2 + \big(-4-(-2)\big)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{6}.$$

(*Övning:* Hur hade vi gått tillväga om sammanträffandet $P \in \Pi_2$ inte hade varit fallet?)