Uppgift 6.5

Betrakta linjerna

$$L_1:\quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$$L_2:\quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Linjerna skär inte varandra, d.v.s. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. För att se det, antag att $(x, y, z) \in L_1 \cap L_2$. Då finns det tal $s, t \in \mathbb{R}$ så att

$$\begin{aligned}x&=-2-4t\\y&=4+t\\z&=-t\end{aligned}\qquad\text{och}\qquad\begin{aligned}x&=-1+2s\\y&=s\\z&=1+2s,\end{aligned}$$

som ger

$$\begin{aligned}&-2-4t=-1+2s\\&4+t=s\\&-t=1+2s.\end{aligned}$$

Det är lätt att visa att det här systemet saknar lösningar. Till exempel kan vi byta ut s mot $4 + t$ i första och tredje ekvationen. Det ger, efter lite förenkling, $3 = 3/2$, som är orimligt.

Vi skall nu bestämma det plan Π som innehåller L_2 (d.v.s. $L_2 \subset \Pi$) och är parallellt med L_1. Vi väljer då någon punkt på L_2 som ”ursprungspunkt” och sedan använder vi linjernas riktningsvektorer till att ”spänna upp” Π. Då kommer garanterat $L_2 \subset \Pi$ och L_1 att vara parallell med Π. Som ursprungspunkt kan vi välja den punkt på L_2 som svarar mot $t = 0$, d.v.s. $(-1, 0, 1)$. Vi får då

$$\Pi:\quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=s\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}+\ t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Notera att $L_2 \subset \Pi$; i själva verket får vi ju L_2 genom att sätta $s = 0$. Det är också klart att $L_1 \parallel \Pi$. För att få Π:s ekvation på normalform kryssar vi de vektorer som ”spänner upp” planet:

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\-6\end{pmatrix}\parallel\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

så planets normalekvation är

$$x+2y-2z=d$$

för något $d \in \mathbb{R}$. Eftersom, t.ex., punkten $(-1,0,1) \in \Pi$ får vi $d = -3$ så att

$$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+2y-2z=-3\}.$$

Slutligen skall vi bestämma avståndet D mellan de två linjerna, d.v.s.

$$D \coloneqq \min_{\substack{\mathbf{x}\in L_1 \\ \mathbf{y}\in L_2}} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Detta kan göras på flera olika sätt. T.ex. kan vi notera att avståndet mellan de två linjerna är samma som avståndet mellan Π och L_1,

$$\min_{\substack{\mathbf{x}\in L_1 \\ \mathbf{y}\in L_2}} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \min_{\substack{\mathbf{x}\in L_1 \\ \mathbf{y}\in \Pi}} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Vidare inser vi att avståndet mellan planet och L_1 måste vara längs en rät linje som träffar planet under rät vinkel. Slutligen inser vi att, eftersom $\Pi \parallel L_1$, så är avståndet från linjen till planet oberoende av utgångspunkten på linjen (d.v.s., oavsett varifrån vi startar på linjen, så är det lika långt till planet om vi går längs planets normalriktning). Låt oss därför välja någon punkt på L_1, $(-2, 4, 0)$, säg. Vår resa mot planet är då

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

d.v.s. vi går vinkelrätt mot planet. När $t = 0$ är vi på linjen. När krockar vi med planet? Stoppa in en godtycklig punkt på linjen (ovan) i planets ekvation. Det ger

$$x(t) + 2y(t) - 2z(t) = -3 \Leftrightarrow (-2+t) + 2(4+2t) - 2(-2t) = -3 \Leftrightarrow t = -1.$$

Avståndet mellan punkterna som svarar mot $t = 0$ (linjen) och $t = -1$ (närmaste punkten på planet) är sålunda

$$D = \sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

Svar: Det sökta planet är $x + 2y - 2z = -3$ och $\min_{\substack{\mathbf{x}\in L_1 \\ \mathbf{y}\in L_2}} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = 3$.