Uppgift 9.3

Bestäm en bas för lösningsrummet $\mathbb{U}$ till systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

och utvidga den sedan till en bas för $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Utvidga slutligen basen till en bas för hela $\mathbb{R}^4$. Ange koordinaterna för $\mathbf{u} = (1,0,0,0)$ i denna bas.

Lösning: Med $x_2 \coloneqq s$ och $x_3 \coloneqq t$ medför $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ att $x_1 = t - s$. Sedan medför $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ att $x_4 = -2t$. Sålunda är

$$\mathbf{x} \in \mathbb{U} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} t-s \\ s \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorerna $\mathbf{f}_1 = (1,0,1,-2)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1,1,0,0)$ utgör därför en bas för $\mathbb{U}$. Vi vill nu utvidga följden till en bas för $\mathbb{W}$, och kan då lägga till någon vektor från $\mathbb{W} \setminus \mathbb{U}$, d.v.s. någon vektor som finns i $\mathbb{W}$ men inte i dess underrum $\mathbb{U}$. En sådan vektor är tydligen $\mathbf{f}_3 = (0,0,0,1)$. Eftersom $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ är linjärt oberoende vektorer i det tredimensionella rummet $\mathbb{W}$ är det klart att de utgör en bas för rummet. [Om $\mathbf{f}_3$ kunde skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ skulle ju $\mathbf{f}_3 \in \mathbb{U}$ som ju inte gäller.] För att erhålla en bas i $\mathbb{R}^4$ behöver vi bara finna en vektor i $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{W}$, t.ex. $\mathbf{f}_4 = (1,0,0,0)$.

Vi ser direkt att $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_4 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[Hade vi inte sett det hade vi antingen tagit fram basbytesmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och erinrat oss att $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X_{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\mathbf{f}}X_{\underline{\mathbf{f}}}$ medför att $X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}X_{\underline{\mathbf{e}}}$, eller så hade vi manuellt betraktat ekvationssystemet $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 + \lambda_4\mathbf{f}_4 = \mathbf{u}$ som är fyra ekvationer i fyra obekanta.]