Uppgift 9.6

Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara underrum till $\mathbb{V}$ sådana att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Vi skall visa att $\dim \mathbb{U}_1 + \dim \mathbb{U}_2 \leq \dim \mathbb{V}$.

Låt $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ utgöra en bas för $\mathbb{U}_1$ och låt $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_l$ utgöra en bas för $\mathbb{U}_2$. Betrakta följden

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_l. \tag{1}$$

Detta är en följd av nollskilda vektorer i $\mathbb{V}$, där de k första vektorerna är linjärt oberoende sinsemellan och de sista l vektorerna också är linjärt oberoende sinsemellan. Är hela följden linjärt oberoende? Välj ut en godtycklig vektor i följden, $\mathbf{f}_i$, säg $(i = 1, \dots, k)$. Vi undrar om denna kan skrivas som en linjärkombination av de andra elementen i följden. I sådana fall måste

$$\mathbf{f}_i = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{k} \lambda_p \mathbf{f}_p + \sum_{p=1}^{l} \mu_p \mathbf{g}_p,$$

d.v.s.

$$\mathbf{f}_i - \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{k} \lambda_p \mathbf{f}_p = \sum_{p=1}^{l} \mu_p \mathbf{g}_p$$

där vänsterledet är en nollskild vektor i $\mathbb{U}_1$ ($\mathbf{f}_i$ kan ju inte skrivas som en linjärkombination av de övriga basvektorerna i $\mathbb{U}_1$), medan högerledet är en nollskild (eftersom vänsterledet är nollskilt!) vektor i $\mathbb{U}_2$. Detta strider mot kravet $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Slutsatsen är att följden (1) är en linjärt oberoende följd i $\mathbb{V}$. Därför är

$$\dim \mathbb{V} \geq k + l = \dim \mathbb{U}_1 + \dim \mathbb{U}_2.$$