

Uppgift B.41c

Vi skall beskriva den linjära avbildning som i standardbasen ges av

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

geometriskt.

Först noterar vi att matrisen är väldigt lik rotationen

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Eller hur! Enda skillnaden är att *den andra kolonnen har multiplicerats med (-1)* . Allmänt, för att multiplicera den k :te kolonnen i en matris med ett tal α , multiplicera matrisen från *höger* med enhetsmatrisen där det k :te diagonalelementet är α (i stället för 1).¹

Mer konkret, i det här fallet, kan du enkelt visa att

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rotation } \pi/3 \\ \text{radianer moturs}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{spegling i} \\ \text{y-axeln}}}.$$

Alltså: Det A gör är att först spegla i y -axeln, och sedan rotera $\frac{\pi}{3}$ radianer moturs. Det är ett sätt att beskriva avbildningen geometriskt. En ekvivalent beskrivning kan vi erhålla om vi bestämmer vilka vektorer som avbildas på sig själva. Vi skall då lösa $AX = X$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som ger

$$\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eller

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Alla punkter på linjen $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ avbildas alltså på sig själva. Eftersom vi vet att avbildningen är en plan isometri med determinant minus ett² så vet vi att avbildningen är en spegling. Alltså är avbildningen en spegling i linjen $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

¹ För att multiplicera en *rad* med en konstant, multiplicera med motsvarande matris från vänster i stället.

² Här blev det lite tekniskt. Jag hoppas Bergqvist pratat om sats 6.7.5 i läroboken.