Uppgift B.42

Vi befinner oss i rummet $\mathbb{R}^3$ och skall bestämma avbildningsmatrisen A (i standardbasen) för den spegling F i ett plan som avbildar $\mathbf{e}_3$ på $k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Antag att planet går genom origo. Eftersom alla speglingar i plan genom origo är isometrier (d.v.s. längdbevarande avbildningar), så måste $\mathbf{e}_3$, som har längden 1, avbildas på $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, som också har längd 1, så vi har alltså bestämt k. Om du blundar och ritar upp problemet i huvudet, ser du att normalriktningen för det plan vi speglar i måste vara $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_3$. Alltså är planets ekvation

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - x_3 = d$$

för någon konstant $d \in \mathbb{R}$. Eftersom vi antar att planet går genom origo, är $d = 0$. Vi har då bestämt ekvationen för det plan vi speglar i. I tillsnyggad form är ekvationen

$$x_1 + x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0.$$

Nu, för att bestämma avbildningsmatrisen, behöver vi ”bara” hitta bilderna av basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ (eftersom vi redan vet att $\mathbf{e}_3$ hamnar på $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$). Alternativt byter vi till en ny bas som passar bättre ihop med problemet. Det är lite lättare, så vi gör så i stället. Vi vill då hitta nya basvektorer $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ så att planets ekvation blir $y_3 = 0$, d.v.s. $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är parallella med planet och $\mathbf{f}_3$ ligger i planets normal. Planets normal är ju

$$N = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right]$$

och eftersom vi gärna vill att den nya basen är ON väljer vi

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Sedan vill vi att $\mathbf{f}_1$ skall vara parallell med planet. Eftersom planet går genom origo, betyder det att spetsen hos vektorn $\mathbf{f}_1$, d.v.s. punkten som vektorn pekar på, måste ligga i planet. Vi kan då välja vilken punkt som helst som uppfyller planets ekvation, t.ex.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den återstående basvektorn $\mathbf{f}_2$ skall också ligga i planet, men eftersom $\mathbf{f}_1$ ligger i planet och $\mathbf{f}_3$ ligger i planets normal, ser vi direkt att vi kan välja

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1 = -\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

för att automatiskt få en vektor i planet som dessutom är vinkelrät mot både $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_3$.

I den nya basen är då avbildningsmatrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eftersom avbildningen är speglingen i planet $y_3 = 0$. Basbytesmatrisens kolonner är de nya basvektorerna:

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Alltså är, enligt standardformeln,

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{-1} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{T}$$

eftersom jag envisades med att T skulle bli ortogonal (”ortonormal”). Vi erhåller

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{T} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observera att vi utgick från att planet vi speglar i går genom origo. Det är ett nödvändigt krav, för om planet inte går genom origo, så är ”reflektionen” i planet inte en *linjär* avbildning!