Uppgift B.59

Låt F vara den vridning i rummet som med *minsta möjliga vridningsvinkel* avbildar $(1, 1, 0)$ på $k(1, 1, 1)$. Vi skall bestämma bilden av den tredje basvektorn, d.v.s. $F(\mathbf{e}_3)$. Eftersom F är en *linjär* avbildning måste det röra sig om en vridning kring en linje genom *origo*. Alla sådana vridningar är isometrier, så eftersom $(1, 1, 0)$ har längden $\sqrt{2}$ måste även $k(1, 1, 1)$ ha längden $\sqrt{2}$, vilket ger $k = \sqrt{2/3}$. Alltså gäller

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \sqrt{\frac{2}{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(där ↦ betyder ”avbildas på”).

Rita en *stor* bild. Rita ut ett koordinatsystem, och markera $(1, 1, 0)$ och $(1, 1, 1)$ och försök se var $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, 1, 1)$ ligger. (Tänk på att det är en rotation kring origo.) Du bör se att det rör sig om rotation 45° kring den linje som går genom origo och har en riktning vinkelrät mot $(1, 1, 0)$ och $(1, 1, 1)$.

Du ser också att den vektor som *avbildas på* $(1, 1, 0)$ är $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, 1, -1)$, d.v.s.

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \mapsto \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Vidare, om vi går ytterligare ett steg bakåt, ser vi att den vektor som avbildas på $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, 1, -1)$ måste vara $-\sqrt{2}\mathbf{e}_3$:

$$-\sqrt{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \sqrt{\frac{2}{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Så

$$F(-\sqrt{2}\mathbf{e}_3) = -\sqrt{2}F(\mathbf{e}_3) = \sqrt{\frac{2}{3}}(1, 1, -1)$$

vilket ger

$$F(\mathbf{e}_3) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1).$$

Detta håller inte facit med om, vilket betyder att minst en av oss (jag och facit) har fel.