Ett par standardproblem i envariabelanalysen

I det här dokumentet visas ”skolboksexempel” på två uppgifter i envariabelanalys. Det ena handlar om att integrera en vanlig typ av rationell funktion, och det andra handlar om att integrera $\sin^2 x$ eller $\cos^2 x$.

Integral av rationell funktion

Vid integration av en rationell funktion (en kvot mellan två polynom) utförs först polynomdivision. Den kvot man erhåller är ett polynom och är alltid lätt att integrera, och resttermen tas som bekant hand om via faktorisering av nämnaren (så långt det går i reella faktorer) följt av partialbråksuppdelning. Av de fyra typer av termer man kan få i partialbråksuppdelningen skall vi här titta på termen

$$\frac{x+c}{x^2+ax+b}$$

där nämnaren saknar reella nollställen. I allmänhet är primitiven till en sådan term summan av en logaritm och en arcustangent. Som exempel använder vi uppgift A 5.13 d.

Uppgift A 5.13 d

Vi tillåter oss här att vara något övertydliga; egentligen skulle vissa steg kunna utföras samtidigt.

$$\int \frac{2x-3}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{2x-3}{(x+2)^2+9}\,dx =$$

$$= \int \frac{2(x+2)-7}{(x+2)^2+9}\,dx = \left|\begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix}\right| = \int \frac{2t-7}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+9}\,dt - 7\int \frac{1}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \ln(t^2+9) - \frac{7}{9}\int \frac{9}{t^2+9}\,dt = |\text{Förkorta täljare och nämnare med 9}| =$$

$$= \ln(t^2+9) - \frac{7}{9}\int \frac{1}{\frac{t^2}{9}+1}\,dt =$$

$$= \ln(t^2+9) - \frac{7}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}\,dt = \left|\begin{matrix} s = t/3 \\ t = 3s \\ dt = 3ds \end{matrix}\right| = \ln(t^2+9) - \frac{7}{3}\int \frac{1}{s^2+1}\,ds =$$

$$= \ln(t^2+9) - \frac{7}{3}\arctan s + C = |\text{Byt ut } s| =$$

$$= \ln(t^2+9) - \frac{7}{3}\arctan\frac{t}{3} + C = |\text{Byt ut } t| =$$

$$= \ln(x^2+4x+13) - \frac{7}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C.$$

(Om vi i kvadratkompletteringen i första raden hade erhållit -9 i stället för $+9$ efter kvadraten i nämnaren hade uträkningen inte fungerat alls på samma sätt. Men som tur är händer detta *aldrig*, ty om vi hade erhållit -9 i nämnaren så hade nämnaren otvivelaktigt haft ett reellt nollställe, vilket bryter mot vårt antagande att nämnaren saknade reella nollställen.)

Integral av $\sin^2 x$ eller $\cos^2 x$

För att integrera $\sin^2 x$ eller $\cos^2 x$behöver man skriva om uttrycket för att bli av med (den svåra) kvadraten.

Som tur är finns det en standardomskrivning för sinus- och cosinuskvadrat, som bygger på enkla trigonometriska räkneregler som bör vara välbekanta.

Låt oss nu beräkna $\int \sin^2 x\,dx$ genom en sådan omskrivning.

Cosinus av dubbla vinkeln är

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Med hjälp av ”trigonometriska ettan” $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ser vi att $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Om vi stoppar in det i formeln för dubbla vinkeln på raden ovan ser vi att

$$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

vilket ger

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

och omskrivningen är klar – vi noterar att högerledet är mycket lätt att integrera.

Vi beräknar nu enkelt

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

På i princip exakt samma sätt kan man skriva om $\cos^2 x$. Gör det som övning, och beräkna $\int \cos^2 x\,dx$!