Integration av potenser av sinus och cosinus

Vi skall här undersöka hur man finner en primitiv till $\sin^n x$ eller $\cos^n x$ där $n \geq 2$ är ett heltal.

$n = 2$

Att finna en primitiv till $\sin^2 x$ eller $\cos^2 x$ är mycket enkelt tack vare cosinus för dubbla vinkeln och den trigonometriska ettan. Dessa två formler kan vi ju i huvudet.

Exempel:

Eftersom

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

så är

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

$n > 2$, n jämnt

Här kan vi använda föregående metod upprepade gånger, eller så kan vi använda Eulers formler (med lite hjälp av Pascals triangel).

Exempel:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\, dx &= \int \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 dx = \\ &= \int \left(\frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16}\right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.\end{aligned}$$

$n > 2$, n udda

Här kan använda Euler, eller så utnyttjar vi ett smart variabelbyte.

Exempel:

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x\, dx &= \int \sin^6 x \cdot \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^3 \cdot \sin x\, dx = \begin{bmatrix} t := \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{bmatrix} = \\ &= -\int (1 - t^2)^3 dt = \cdots = \frac{1}{7}t^7 - \frac{3}{5}t^5 + t^3 - t + C = \\ &= \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C.\end{aligned}$$

Notera hur det kommer sig att den här metoden bara fungerar om n är udda! Lägg också märke till att Eulers metod ger upphov till en primitiv funktion utan potenser på sinus- och cosinusfunktionerna, till skillnad från variabelbytet.