# Integration av rationella funktioner

Vi har ett ”recept” med vilket vi tämligen enkelt kan bestämma en primitiv funktion till *varje* rationell funktion, d.v.s. till *varje* kvot $p(x)/q(x)$ mellan två polynom $p(x)$ och $q(x)$. Receptet består av följande delar: (1) utför polynomdivision om $\deg p(x) \geq \deg q(x)$, (2) faktorisera nämnaren (i den intressanta termen) fullständigt i reella faktorer, (3) utför partialbråksuppdelning och (4) integrera de termer som uppkommer i partialbråksuppdelningen. *En* av de sorters termer som kan uppkomma är en kvot mellan ett förstagradspolynom och ett andragradspolynom (där andragradspolynomet saknar reella nollställen). Vi skall här se ett exempel på hur integralen av en sådan term i allmänhet är en summa av en logaritm och en arcustangent.

**Exempel:**

$$\text{Beräkna} \quad \int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\,dx.$$

*Lösning:*

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{3x-1}{(x+1)^2+4}\,dx = \begin{bmatrix} t := x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{3(t-1)-1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{3t-4}{t^2+4}\,dt =$$
$$= 3\int \frac{t}{t^2+4}\,dt - 4\int \frac{1}{t^2+4}\,dt$$

där

$$\int \frac{t}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t^2+4| + C_1 = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C_1$$

och

$$\int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{1/4}{t^2/4+1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt = \begin{bmatrix} s := \frac{t}{2} \\ ds = \frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{s^2+1}\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\arctan s + C_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C_2$$

så att

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - 2\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

**Anmärkning:** I vissa fall blir integralen av en kvot mellan ett förstagradspolynom och ett andragradspolynom (utan reella nollställen) *enbart* en logaritm. Det är till exempel klart att

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx = \ln|x^2+3x+4| + C = \ln(x^2+3x+4) + C.$$