Uppgift A 4.33

Deluppgift a)

Vi skall rita kurvan

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Vi inser direkt att definitionsmängden är

$$D_f =]-1, 1[$$

eftersom uttrycket under rottecknet måste vara positivt. (Naturligtvis kan man också beräkna roten ur noll, men då $\sqrt{0} = 0$ får vi ju division med noll som inte heller är särskilt angenämt. Alltså måste definitionsmängden vara ett *öppet* intervall.)

Vi inser att i ändpunkterna gäller

$$\begin{aligned} y &\to +\infty, \qquad x \to +1 \\ y &\to -\infty, \qquad x \to -1 \end{aligned}$$

eftersom nämnaren närmar sig 0^+ (d.v.s. noll från den positiva sidan) medan täljaren närmar sig $+1$ respektive -1. Vi noterar också att $y(0) = 0$ och att f är en *udda* funktion.

Derivatan är

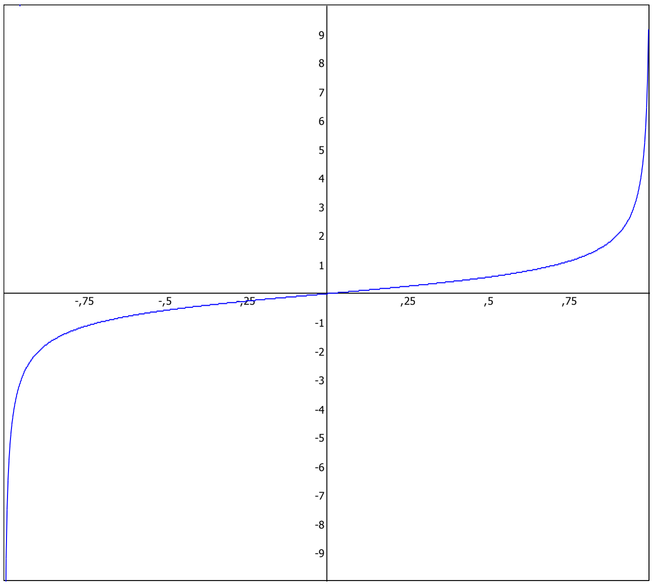
$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left[x \cdot (1 - x^2)^{-(1/2)}\right] = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) + (1 - x^2)^{-1/2} = \\ &= \frac{x^2}{(1 - x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x^2}{(1 - x^2)^{3/2}} + \frac{1 - x^2}{(1 - x^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} > 0 \quad \forall x \in D_f \end{aligned}$$

så att *f* är strängt växande. Vi ser att det i ändpunkterna gäller

$$y' \to +\infty, \qquad x \to \pm 1$$

samt noterar även att $y'(0) = 1$.

Vi har nu allt som krävs för att rita grafen. Vi erhåller i princip grafen intill.



Deluppgift b)

Nu har vi

$$y = f(x) = \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln\frac{|x|}{1+x^2}.$$

Första termen ger att $0 \notin D_f$; alla andra punkter i $\mathbb{R}$ tillhör definitionsmängden.

Vi börjar med att undersöka gränsvärden i $+\infty$:

$$\frac{1}{x} \to 0, \qquad 2\arctan x \to \pi, \qquad \ln\frac{|x|}{1+x^2} \to -\infty$$

så att $y \to -\infty,\ x \to +\infty$.

Motsvarande analys i minus oändligheten ger samma resultat så när som på att $2\arctan x \to -\pi$, vilket dock ger samma gränsvärde $y \to -\infty,\ x \to -\infty$.

Alltså gäller

$$y \to -\infty, \qquad x \to \pm\infty.$$

Vi måste nu också undersöka diskontinuiteten i origo. Eftersom $\arctan x \to 0$ då $x \to 0$ behöver vi bara undersöka gränsvärdena av

$$y = \frac{1}{x} + \ln\frac{|x|}{1+x^2}$$

då $x \to 0^+$ samt $x \to 0^-$.

Vi har att

$$\frac{1}{x} \to \pm\infty, \qquad x \to 0^\pm$$

samt att

$$\ln\frac{|x|}{1+x^2} \to -\infty, \qquad x \to 0.$$

Således är det klart att

$$\frac{1}{x} + \ln\frac{|x|}{1+x^2} \to -\infty, \qquad x \to 0^-$$

eftersom båda termerna går åt $-\infty$. Om vi i stället låter $x \to 0^+$ erhåller vi

$$\frac{1}{x} + \ln\frac{|x|}{1+x^2} \to +\infty, \qquad x \to 0^+.$$

Första termen går åt $+\infty$ medan andra går åt $-\infty$, men första termen $1/x$ går mycket snabbare åt oändligheten, så gränsvärdet blir $+\infty$. Detta visas genom variabelbytet $t = 1/x$: vi erhåller då

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x} + \ln\frac{|x|}{1+x^2}\right] = \lim_{t\to\infty}\left[t + \ln\frac{1/t}{1+1/t^2}\right] = \lim_{t\to\infty}[t + \ln(1/t)] = \lim_{t\to\infty}[t + \ln 1 - \ln t] =$$

$$= \lim_{t\to\infty}[t - \ln t] = \lim_{t\to\infty}\left[t\left(1 - \frac{\ln t}{t}\right)\right] = |\text{Hastighetstabell}| = \infty,$$

där vi i sista ledet tillåter oss att använda likhetstecknet på ett något oegentligt sätt (∞ är ju egentligen inte ett reellt tal).

Låt oss sammanfatta vad vi funnit hittills:

$$\begin{aligned} y &\to -\infty, & x &\to \pm\infty \\ y &\to -\infty, & x &\to 0^- \\ y &\to +\infty, & x &\to 0^+. \end{aligned}$$

Vi undersöker nu derivatan. Vi skriver först om funktionen enligt

$$y = \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln|x| - \ln(1+x^2)$$

så att derivatan blir

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} = \cdots = -\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2(x^2+1)}.$$

Det är klart att $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, +1\}$.

Vi erhåller derivatans teckentabell

x		-1		0		$+1$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$

Vi har alltså en maximipunkt för $x = -1$ och en nedåtgående terrasspunkt för $x = 1$. I dessa punkter är $y(-1) = -(1 + \pi/2 + \ln 2)$ respektive $y(1) = 1 + \pi/2 - \ln 2$.

Om vi utvecklar parenteserna i uttrycket för derivatan erhåller vi

$$y' = -\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 + x^2} = -\frac{1/x - 1/x^2 - 1/x^3 + 1/x^4}{1 + 1/x^2} \to 0, \qquad x \to \pm\infty.$$

Grafen planar alltså ut när vi går mot plus eller minus oändligheten; detta kan tyckas strida mot det faktum att kurvan skall närma sig minus oändligheten i dessa gränser, men detta är alltså bara en skenbar motsägelse. Det skall dock sägas att grafen går mot minus oändligheten extremt långsamt. Till exempel är $y(10^{50}) \approx -112$.

Vi behöver nu bara undersöka hur derivatan uppför sig i närheten av origo.

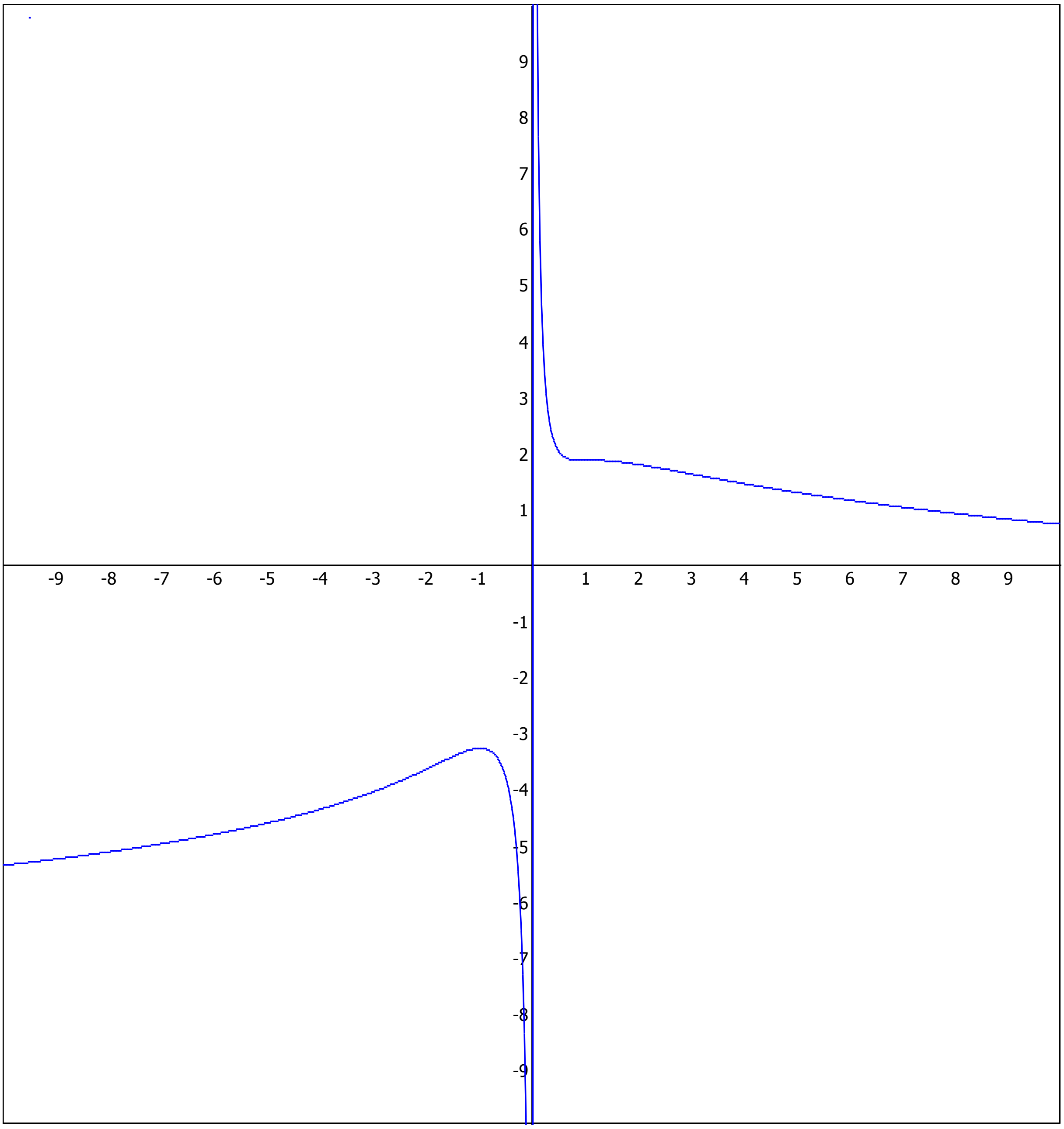
Om $x \approx 0$ så är

$$y' = -\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 + x^2} \approx -\frac{1}{x^4 + x^2} < 0 \ \ \forall\, x \approx 0.$$

Således är det klart att

$$y' \to -\infty, \qquad x \to 0.$$

Detta stämmer överrens med det faktum att kurvan skall gå mot $\pm\infty$ då $x \to 0^{\pm}$. Om vi använder oss av alla punkter och lutningar och gränsvärden vi funnit erhåller vi i princip grafen här nedan.


9
8
7
6
5
4
3
2
1
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9