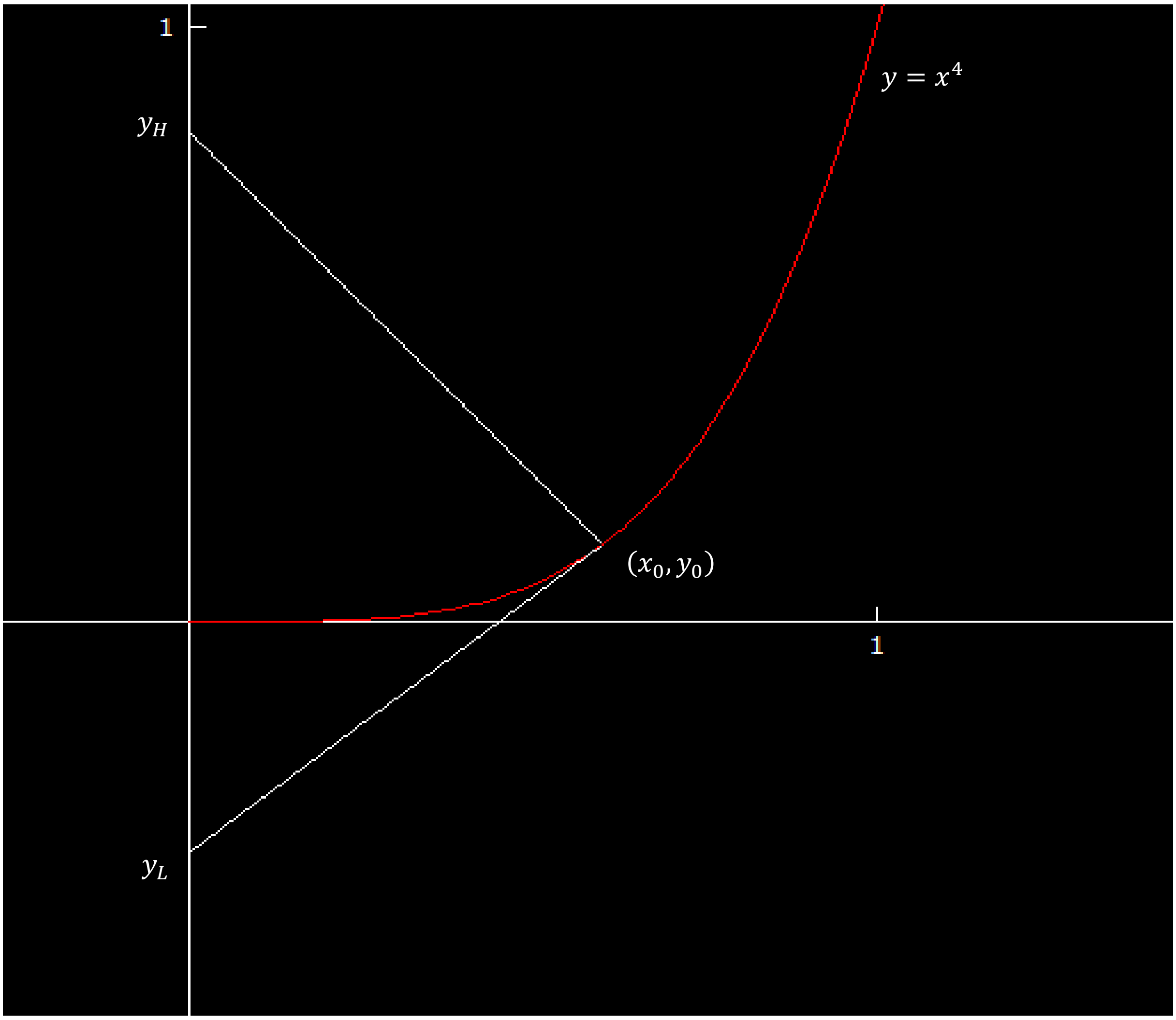
Uppgift A 4.36

I en punkt på kurvan $y = x^4, x > 0$ dras tangent och normal. Dessa avgränsar, tillsammans med y-axeln, en triangel. Vi skall undersöka triangelns area.

Rita en bild.



Låt den fixa, valda punkten på kurvan vara $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^4)$, och låt tangentens resp. normalens skärningspunkt med y-axeln vara y_L (lägsta) respektive y_H (högsta). Triangelns area är tydligen

$$A(x_0) = \frac{1}{2}(y_H - y_L)x_0$$

där förstås y_H och y_L beror på x_0. Vi skall bestämma dessa. Tangenten heter (d.v.s. är mängden av alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller)

$$T: \quad y - y_0 = k(x - x_0)$$

där $y_0 = x_0^4$ och $k = \frac{d}{dx}x^4 \Big|_{x=x_0} = 4x_0^3$. Alltså är

$$T: \quad y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0).$$

Stoppa in $(x, y) = (0, y_L)$ som vi vet ligger på tangenten:

$$y_L - x_0^4 = -4x_0^4.$$

Tydligen är

$$y_L = -3x_0^4.$$

Normalens ekvation är i sin tur

$$N: \quad y - x_0^4 = -\frac{1}{4x_0^3}(x - x_0).$$

Stoppa in $(x, y) = (0, y_H)$ som vi vet ligger på normalen:

$$y_H - x_0^4 = \frac{1}{4x_0^2}.$$

Tydligen är

$$y_H = x_0^4 + \frac{1}{4x_0^2}.$$

Vi har alltså funnit $y_L(x_0)$ och $y_H(x_0)$, och därmed är triangelns area

$$A(x_0) = \frac{1}{2}(y_H - y_L)x_0 = \frac{1}{2}\left(x_0^4 + \frac{1}{4x_0^2} + 3x_0^4\right)x_0 = 2x_0^5 + \frac{1}{8x_0}.$$

Uppenbarligen kan triangelns area bli hur stor som helst, ty $A(x_0) \to \infty$ både när $x_0 \to 0^+$ och när $x_0 \to \infty$. Hur liten kan den bli? Låt oss finna areans minsta värde. Eftersom

$$\frac{dA}{dx_0} = 10x_0^4 - \frac{1}{8x_0^2} = 0 \Leftrightarrow 10x_0^6 - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 10x_0^6 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x_0^6 \Leftrightarrow \frac{1}{80} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{80}}$$

så har funktionen precis en stationär punkt, som alltså måste vara ett lokalt minimum, och till och med funktionens globala minimum (varför?). I den här punkten är arean

$$A\left(\frac{1}{\sqrt[6]{80}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{80}}\right)^5 + \frac{1}{8\left(\frac{1}{\sqrt[6]{80}}\right)} = \frac{2}{80^{5/6}} + \frac{80^{1/6}}{8} = \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 80^{5/6}} + \frac{80^{5/6} \cdot 80^{1/6}}{8 \cdot 80^{5/6}} =$$
$$= \frac{16}{8 \cdot 80^{5/6}} + \frac{80}{8 \cdot 80^{5/6}} = \frac{96}{8 \cdot 80^{5/6}} = \frac{12}{80^{5/6}}.$$

Arean kan alltså anta varje värde större än eller lika med $12 \cdot 80^{-5/6} \approx 0.311$.

Anmärkning: Talet $\frac{12}{80^{5/6}}$ kan också skrivas

$$\frac{12}{80^{5/6}} = \frac{12 \cdot 80^{1/6}}{80^{5/6} \cdot 80^{1/6}} = \frac{12 \cdot 80^{1/6}}{80} = \frac{3}{20} \cdot 80^{1/6}.$$