Uppgift A 4.42

Vi skall rita grafen

$$y = f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1 - x^2}.$$

Vi noterar först att definitionsmängden

$$D_f = [-1, 1]$$

krävs av båda termerna.

Vi finner dessutom att $y(-1) = -\pi/2$, $y(0) = 2$ och $y(1) = \pi/2$.

Derivatan är

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Av derivatans teckenväxling ser vi att grafen har en maximipunkt för $x = 1/2$. Värdet här är $y(1/2) = \pi/6 + \sqrt{3}$.

Vi noterar att $y'(0) = 1$. Vi kan dock inte bestämma något värde på derivatan i ändpunkterna $x = \pm 1$. Detta är självklart eftersom derivatan bara är definierad för *inre* punkter i D_f. (Man säger ju att derivatan existerar om såväl höger- som vänsterderivatorna existerar och är lika, men i randpunkterna existerar ju bara en av dem.) Vi ser också att $y'(\pm 1)$ inte existerar när vi tittar på uttrycket för derivatan, som ju där ger upphov till division med noll.

Vi kan däremot bestämma gränsvärdena av derivatan, när x närmar sig randpunkterna $x = \pm 1$ från lämpligt håll.

Vi erhåller

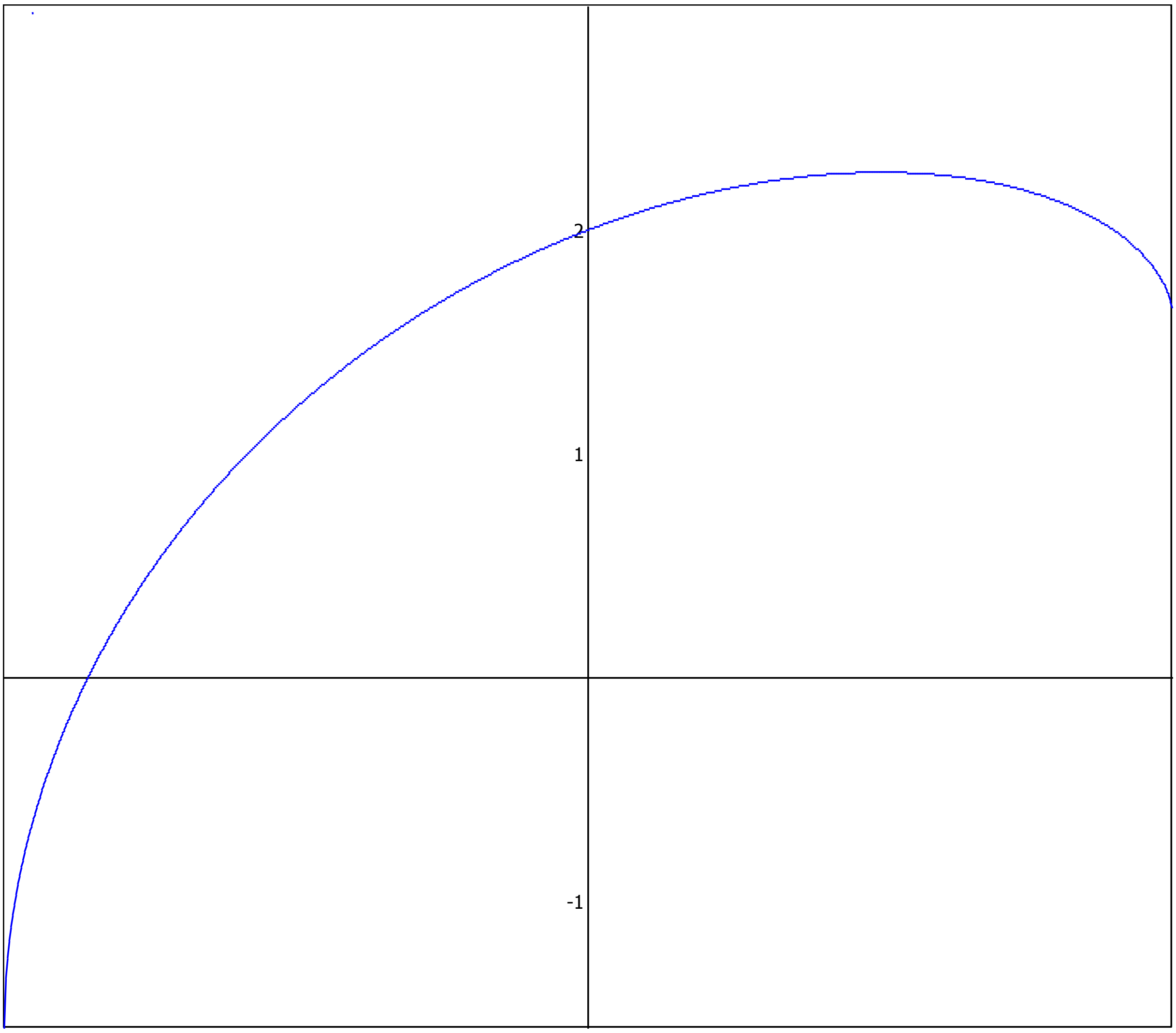
$$y'(x) = \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 - x^2}} \to -\infty, \qquad x \to 1$$

eftersom nämnaren närmar sig noll från höger och täljaren närmar sig det reella talet -1.

Analogt erhåller vi

$$y'(x) = \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 - x^2}} \to +\infty, \qquad x \to -1.$$

Vi kan nu rita grafen.


2
1
-1