Uppgift A4.33b

Vi skall skissa kurvan

$$y = \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln\frac{|x|}{1+x^2}.$$

Det ”svåra” är beloppstecknet. Vi kan antingen

1. derivera som vanligt, d.v.s. beräkna den inre derivatan av $\ln\frac{|x|}{1+x^2}$ på vanligt sätt, och notera att derivatan av $|x|$ är $\operatorname{sgn} x$. Vi får då komma ihåg (de egentligen självklara!) räknereglerna (som dock inte ens nämns i kursen) för signum- och beloppsfunktionerna, t.ex. att $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{\operatorname{sgn} x}$. T.ex. är ju $6 = 6 \cdot 1 = \frac{6}{1}$ och $-9 = 9 \cdot (-1) = \frac{9}{-1}$, eller
2. dela upp problemet i två delar. Rita först $y = \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln\frac{x}{1+x^2}$ för $x > 0$ och rita sedan $y = \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln\frac{-x}{1+x^2}$ för $x < 0$, eller, lättast
3. notera att $\ln\frac{|x|}{1+x^2} = \ln|x| - \ln(1+x^2)$ och sedan erinra oss att $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ faktiskt är en standardderivata! Om du inte tror mig, så visar man det enkelt. Sätt $y = |x|$. Då är $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{d}{dx}|x| = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}$.

Jag tog mig i den numrerade listan ovan friheten att framhäva den viktigaste meningen och tona ner överkursmaterialet. Vi har alltså

$$y = \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln|x| - \ln(1+x^2) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \cdots =$$
$$= -\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2(x^2+1)}$$

och tydligen är $y'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ och $y'(x) < 0 \Leftrightarrow x > -1$. Med andra ord är $x = -1$ ett lokalt maximum. Vidare [av funktionen skriven på den ursprungliga formen] ser vi att

$$y(x) \to -\infty, \qquad x \to \infty$$

ty $\frac{1}{x} \to 0$, $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ och logaritmens argument $\sim \frac{1}{x} \to 0^+$ och $\ln \epsilon \to -\infty$ då $\epsilon \to 0^+$ samtidigt som en nästan identisk analys ger att även

$$y(x) \to -\infty, \qquad x \to -\infty$$

(notera att argumentet till ln är en jämn funktion av x). Slutligen måste vi undersöka den singulära punkten $x = 0$ från båda hållen. Oavsett vilket håll vi kommer från går logaritmen mot $-\infty$, och arcustangenten går mot noll. Om $x \to 0^-$ går även $\frac{1}{x} \to -\infty$, så denna term samverkar med logaritmen. Om å andra sidan $x \to 0^+$ så har vi situationen (här kan vi titta på den andra formen):

$$y(x) = \frac{1}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} + \underbrace{2\arctan x}_{\to 0} + \underbrace{\ln|x|}_{\to -\infty} - \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\to 0}.$$

Däremot går $\frac{1}{x}$ mot oändligheten snabbare än av $\ln x$ går mot minus oändligheten. Detta kan man insе genom att notera att

$$\frac{1}{x} + \ln x = \frac{1}{x}\Bigg(1 + \underbrace{x \ln x}_{\to 0}\Bigg) \to \infty, \qquad x \to 0^{+}.$$