Uppgift A4.34

Vi skall visa att

$$\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sätt

$$f(x) \coloneqq \arctan(x+1) - \arctan x - \arctan \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Vi skall alltså visa att $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Men det är enkelt, ty

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2} \cdot (-1)(x^2+x+1)^{-2} \cdot (2x+1) = \cdots = 0$$

och f är därmed en konstant funktion, d.v.s. $f(x)$ är samma tal för alla x. Vilket tal? Notera att det är uppenbart att $f(0) = 0$. Eftersom $f(0) = 0$ och f är kostant, är då $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Q.E.D.