Uppgift A5.28a

Först reducerar vi problemet till ett ”standardproblem”:

$$\int x\sqrt{x^4+2x^2+3}dx = \int x\sqrt{(x^2+1)^2+2}dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+2}dt.$$

Det finns många olika sätt att beräkna ”standardproblemet” $\int \sqrt{t^2+2}dt$. Ett sätt är att använda de standardvariabelbyten som Forsling diskuterar på sidan 271. Vi utför det rekommenderade variabelbytet

$$\begin{bmatrix} s = t + \sqrt{t^2+2} \\ s - t = \sqrt{t^2+2} \\ s^2 - 2st + t^2 = t^2 + 2 \\ s^2 - 2st = 2 \\ t = \frac{s}{2} - \frac{1}{s} \\ dt = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s^2}\right) ds \end{bmatrix}$$

och finner då

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\int (s-t)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{s^2}\right) ds = \frac{1}{2}\int \left(s - \left[\frac{s}{2} - \frac{1}{s}\right]\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{s^2}\right) ds$$

som förenklas till

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{s^3} + \frac{s}{4} + \frac{1}{s}\right) ds = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}s^{-2} + \frac{1}{8}s^2 + \ln s\right) + C.$$

Byt tillbaka till variabeln t:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}s^{-2} + \frac{1}{8}s^2 + \ln s\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2+2}\right)^{-2} + \frac{1}{8}\left(t + \sqrt{t^2+2}\right)^2 + \ln\left(t + \sqrt{t^2+2}\right)\right).$$

Byt tillbaka till variabeln x:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+1+\sqrt{t^2+2}\right)^{-2} + \frac{1}{8}\left(x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2+2}\right)^2 + \ln\left(x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2+2}\right)\right).$$

Förenkling ger nu

$$\begin{aligned} &\int x\sqrt{x^4+2x^2+3}dx = \\ &\qquad = -\frac{1}{4}\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2+3}\right)^{-2} + \frac{1}{16}\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2+3}\right)^2 + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2+3}\right) + C. \end{aligned}$$

De två första termerna kan skrivas på gemensamt bråkstreck varvid vi erhåller precis vad som står i facit.