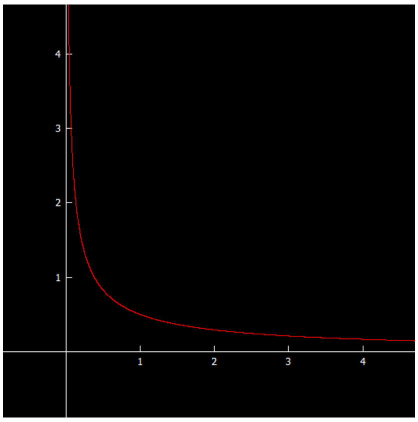
Uppgift A6.22

Vi skall visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})} \geq \ln\frac{n}{4}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

För att göra detta, betraktar vi den ”motsvarande” (eller snarare: ”liknande”) integralen

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}.$$



Integranden är tydligen strängt avtagande på $\mathbb{R}^+$ (se bild till höger). Vi kan enkelt finna en övertrappa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})}.$$

För att se att gränserna är korrekta, antag t.ex. att $n = 3$. I sådana fall är integralen $\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}$ arean under kurvan från $x = 1$ till $x = 4$. Men detta är precis vad vår översumma överskattar. (Rita in övertrappan i grafen till höger.) Således

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})}.$$

Men integralen

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} = \begin{bmatrix} s = \sqrt{t} \\ s^2 = t \\ 2sds = dt \end{bmatrix} = \int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2sds}{s(1+s)} = \int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2ds}{1+s} = [2\ln(s+1)]_1^{\sqrt{n+1}} =$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{n+1}+1\right) - 2\ln 2 = 2\ln\frac{\sqrt{n+1}+1}{2} = \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \ln\left(\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

så i själva verket har vi visat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})} \geq \ln\left(\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Men om $n \geq 1$ så är $\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{n}{4}$ så $\ln\left(\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\right) \geq \ln\frac{n}{4}$. Därmed är

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})} \geq \ln\left(\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\right) \geq \ln\frac{n}{4}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$