Uppgift B 3.48

Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Vi börjar med att förkorta bråket med faktorn $\sqrt{x}$, varvid vi erhåller

$$\frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}.$$

Vi undersöker nu täljaren och nämnaren var för sig. Förlängning av täljaren med dess konjugat ger oss

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

Förlängning av nämnaren dess konjugat ger å andra sidan

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}.$$

Alltså kan kvoten skrivas

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}},$$

där vi i andra ledet multiplicerade täljaren med det inverterade värdet av nämnaren i stället för att dividera med denna. Men faktorn

$$\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \left| \begin{matrix} \text{Förkorta med} \\ \text{faktorn } \sqrt{x}. \end{matrix} \right| = \frac{\sqrt{1 + 2/x} + \sqrt{1 - 2/x}}{\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt{1 - 1/x}} \to \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1, \qquad x \to \infty.$$

Således måste

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \to \frac{1}{2}, \qquad x \to \infty$$

så att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{1}{2}$$

och uppgiften är därmed löst (jag ber om ursäkt för förseningen!).