Uppgift 10.28

Vi skall bestämma ett rationellt närmevärde till $\ln 2$. Vi noterar då att

$$\ln 2 = \ln \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3}$$

varför vi kan nyttja serieutvecklingen av

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

Vi har ju att

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \forall x \in]-1, 1[.$$

Eftersom $x \in]-1, 1[\Leftrightarrow -x \in]-1, 1[$ kan vi ersätta x mot $-x$ för att erhålla

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \forall x \in]-1, 1[.$$

Därför är

$$\begin{aligned}\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

I synnerhet har vi

$$\ln 2 = \ln \frac{1+1/3}{1-1/3} \approx 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} = \frac{842}{1215} = 0.693004 \ldots.$$

Felets storlek är

$$\begin{aligned}\left|\ln 2 - \frac{842}{1215}\right| &= \left|2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} - 2\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\right| = \left|2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\right| = \\ &= 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{7 \cdot 3^7} \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{7}{(2n+1)} \cdot \frac{3^7}{3^{2n+1}}\right] = \\ &= \frac{2}{7 \cdot 3^7}\left[\frac{7}{7} \cdot \frac{3^7}{3^7} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3^7}{3^9} + \frac{7}{11} \cdot \frac{3^7}{3^{11}} + \cdots\right] \leq \frac{2}{7 \cdot 3^7}\left[1 \cdot \frac{3^7}{3^7} + 1 \cdot \frac{3^7}{3^9} + 1 \cdot \frac{3^7}{3^{11}} + \cdots\right] = \\ &= \frac{2}{7 \cdot 3^7}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right] = \frac{2}{7 \cdot 3^7}\left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right] = \frac{2}{7 \cdot 3^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{6804} = \\ &= 0.00014697 \ldots < 0.0002,\end{aligned}$$

d.v.s. ganska litet.