Uppgift A7.23

Vi skall bestämma ett närmevärde till $\sqrt[5]{33}$ med ett fel på höst 10^{-3}.

Lösning: Vi använder Maclaurinutvecklingen

$$(1+x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}(1+\theta x)^{-14/5}x^3$$

för något $\theta \in [0,1]$ (som beror på x). Det är nu en mycket dålig idé att använda resultatet ovan med $x = 32$ (d.v.s. skriva $\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{1+32}$), eftersom 32 är mycket långt från noll, till och med långt utanför konvergensradien $R = 1$ för serieutvecklingen. I stället använder vi

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{33} &= \sqrt[5]{1+32} = \sqrt[5]{32(1+1/32)} = 2\sqrt[5]{1+1/32} = \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{2}{25}\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \frac{6}{125}\left(1+\theta\left(\frac{1}{32}\right)\right)^{-14/5}\left(\frac{1}{32}\right)^3\right) \approx \\ &\approx 2\left(1 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{2}{25}\left(\frac{1}{32}\right)^2\right) = \frac{12879}{6400} (= 2.01234375).\end{aligned}$$

Felet är

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt[5]{33} - 2\left(1 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{2}{25}\left(\frac{1}{32}\right)^2\right)\right| = \left|2\cdot\frac{6}{125}\left(1+\theta\left(\frac{1}{32}\right)\right)^{-14/5}\left(\frac{1}{32}\right)^3\right| \leq \\ &\leq \left|2\cdot\frac{6}{125}\left(1+0\cdot\left(\frac{1}{32}\right)\right)^{-14/5}\left(\frac{1}{32}\right)^3\right| = \left|2\cdot\frac{6}{125}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^3\right| = \frac{3}{1024000} \ll 10^{-3}\end{aligned}$$

så vi gjorde tydligen en mycket bättre uppskattning än vad som krävdes. Förmodligen skulle det räcka med de två första termerna i utvecklingen av $(1+x)^{1/5}$.