Uppgift A7.24

Deluppgift A

Vi skall visa funktionen $f: x \mapsto xe^{x^2}$ är injektiv. Ett sätt att visa att en funktion är inverterbar är förstås att bestämma inversen, men i det här fallet kan man visa att inversen (som existerar) inte kan uttryckas i elementära funktioner, så vi skippar den metoden.

I stället noterar vi att

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

så att funktionen är strängt växande, och därmed injektiv.

Deluppgift B

Vi skall bestämma en Maclaurin-utveckling av inversen f^{-1} med restterm $\mathcal{O}(x^7)$. Vi noterar då att f, som är en produkt av en udda och en jämn funktion, är udda. [Det är lätt att visa: låt J vara jämn och U vara udda. Kalla produkten för P. Då är $P(x) = J(x)U(x)$ och $P(-x) = J(-x)U(-x) = J(x) \cdot \big(-U(x)\big) = -J(x)U(x) = -P(x)$ så att P är udda.] Inversen till en udda funktion är udda [också lätt att visa]. Slutligen, en udda funktion har bara udda exponenter i sin serieutveckling. Därför kan vi göra en ansats

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

Maclaurin-utveckling av f ger å sin sida [trivialt]

$$f(x) = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

Sätt in dessa utvecklingar i $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ för att erhålla

$$\big(ax + bx^3 + cx^5 + \mathcal{O}(x^7)\big) + \big(ax + bx^3 + cx^5 + \mathcal{O}(x^7)\big)^3 + \frac{1}{2}\big(ax + bx^3 + cx^5 + \mathcal{O}(x^7)\big)^5 + \\ + \mathcal{O}(x^7) = x$$

som förenklas till

$$ax + (a^3 + b)x^3 + \left(c + 3a^2b + \frac{1}{2}a^5\right)x^5 + \mathcal{O}(x^7) = x$$

som ger

$$\begin{cases} a = 1 \\ a^3 + b = 0 \\ c + 3a^2b + \frac{1}{2}a^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c + 3a^2b + \frac{1}{2}a^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 5/2 \end{cases}$$

så att, slutligen

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$