Uppgift A8.37

Vi skall lösa den linjära differentialekvationen

$$y'' + 2y = \sin x - \cos x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Den homogena ekvationen

$$y'' + 2y = 0$$

har den karaktäristiska ekvationen

$$r^2 + 2 = 0$$

med rötterna $r = \pm\sqrt{2}i$. Den allmänna lösningen [till den homogena ekvationen] är alltså

$$y_H(x) = Ae^{\sqrt{2}ix} + Be^{-\sqrt{2}ix}$$

som också kan skrivas[1] på den mer ”reella” formen:

$$y_H(x) = C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2 \cos\sqrt{2}\,x$$

för två andra konstanter C_1 och C_2. Nu behöver vi bara hitta *en* partikulärlösning till den ursprungliga differentialekvationen. Vi ansätter således

$$\begin{aligned} y &= A\sin x + B\cos x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = A\cos x - B\sin x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y'' = -A\sin x - B\cos x \end{aligned}$$

så att ekvationen lyder

$$-A\sin x - B\cos x + 2\,A\sin x + 2B\cos x = A\sin x + B\cos x = \sin x - \cos x.$$

Vi sätter alltså $(A, B) = (1, -1)$:

$$y_P(x) = \sin x - \cos x.$$

Således är den fullständiga lösningen till den ursprungliga ekvationen

$$y(x) = y_H + y_P = C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2 \cos\sqrt{2}\,x + \sin x - \cos x.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger

$$y(0) = C_2 - 1 = 1 \Rightarrow C_2 = 2$$

medan derivering ger

$$y'^{(x)} = \sqrt{2}C_1 \cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}C_2 \sin\sqrt{2}\,x + \cos x + \sin x$$

[1] För att inse det, använd definitionen av den komplexa exponentialfunktionen, d.v.s. $e^{ai} = \cos a + i\sin a$ med $a \in \mathbb{R}$ och sortera termerna m.a.p. sin och cos. Det är en enkel övning.

så att det andra begynnelsevillkoret $y'(0) = 0$ ger

$$y'(0) = \sqrt{2}C_1 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså är den sökta lösningen

$$\begin{aligned} y(x) = y_H + y_P = C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2 \cos\sqrt{2}\,x + \sin x - \cos x = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x + 2\cos\sqrt{2}\,x + \sin x - \cos x \end{aligned}$$

och vi äro klara. [Notera att $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och att detta alltså stämmer överens med facit.]