Uppgift B 10.22

Bestäm i potensserieform alla lösningar till differentialekvationen $y'' - y = x$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

Lösning: Vi ansätter

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Då är

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \right)$$

och

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n.$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$y'' - y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n]x^n = x.$$

Högerledet är potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ med $d_n = 1$ för $n = 1$ och $d_n = 0$ för alla andra n. Om två potensserier är lika måste varje koefficient vara lika, så

$$\begin{aligned}
n = 0&: \quad 2c_2 - c_0 = 0 \\
n = 1&: \quad 6c_3 - c_1 = 1 \\
n \geq 2&: \quad c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n = 0.
\end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger $c_0 = 1$ och $c_1 = 0$. Första ekvationen ger då $c_2 = \frac{1}{2}$ och andra ger $c_3 = \frac{1}{6}$. Tredje ekvationen ger i allmänhet

$$c_{n+2} = \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad \forall n \geq 2$$

så

$$c_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \quad \Longrightarrow \quad c_4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad c_6 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \quad \Longrightarrow \quad \dots$$

och

$$c_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \Longrightarrow \quad c_5 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \quad \Longrightarrow$$

$$\implies \qquad c_7 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} \qquad \implies \qquad \cdots$$

så att $c_0 = 1, c_1 = 0$ och $c_n = 1/n!$ för alla $n \geq 2$. Alltså har vi funnit lösningen

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Konvergensradien R ges t.ex. av kvotkriteriet. Med $a_k = x^k/k!$ erhåller vi

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\Big/\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{k!}{(k+1)!}|x| = \frac{1}{k+1}|x| \to 0$$

då $k \to \infty$ för varje $x \in \mathbb{R}$ så $R = \infty$.

Svar: $y(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

PS. Vi känner förstås igen att $y(x) = e^x - x$.