Uppgift B 10.25

Deluppgift A

Lös differentialekvationen $(1-x)y' = 2y$, $y(0) = 1$ på potensserieform.

Lösning: Vi ansätter en potensserieutveckling

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Då är

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$$

och

$$xy'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n.$$

Ekvationen $(1-x)y' = 2y$ är ekvivalent med $y' - xy' - 2y = 0$ som med ansatsen ovan ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n+1}(n+1) - c_n n - 2c_n]x^n = 0.$$

Om två potensserier är lika måste varje koefficient vara lika, så

$$c_{n+1}(n+1) - c_n n - 2c_n = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

som ger rekursionsformeln

$$c_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} c_n.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $c_0 = 1$ varefter rekursionsformeln ger

$$c_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{2 \cdot 1}{1} \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \quad \Longrightarrow \quad c_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \quad \Longrightarrow \quad \cdots$$

d.v.s.

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 2, \qquad c_2 = 3, \qquad c_3 = 4, \ldots$$

d.v.s. $c_n = n + 1$. Vi har därför funnit lösningen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Låt oss bestämma konvergensradien för den erhållna potensserien. Kvotkriteriet ger

$$\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = \frac{n+2}{n+1}|x| \to |x|, \qquad n \to \infty$$

så att konvergensradien $R = 1$.