Uppgift B 8.28

Undersök om f har lokalt maximum eller minimum i 0 där

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \sin x.$$

Lösning: Eftersom

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \mathcal{O}(t^5)$$

när $t \to 0$ så är

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^4 + \mathcal{O}\left(\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^5\right) = \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^4 + \mathcal{O}(x^5) = \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

då $x \to 0$. Eftersom

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

har vi sålunda

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^5) = \frac{1}{8}x^4\big(1 + \mathcal{O}(x)\big).$$

Eftersom $\mathcal{O}(x) \to 0$ då $x \to 0$ är det klart att $1 + \mathcal{O}(x) \to 1$ då $x \to 0$. Enligt definitionen av gränsvärde är det därför klart att det finns något $\delta > 0$ så att $1 + \mathcal{O}(x) > 0$ för alla $x \in [-\delta, \delta]$. Därför är $f(0) = 0$ men $f(x) > 0$ för alla $x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$. Enligt definitionen av ett lokalt minimum (s. 200 i Forsling) har alltså f ett lokalt minimum i origo.