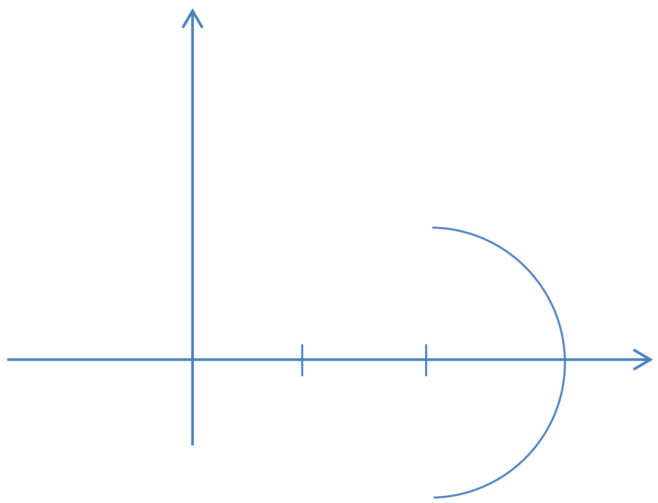
Uppgift B7.37

Den halvcirkelformade tråden $(x-2)^2+y^2=1, x \geq 2$ roteras ett varv kring y-axeln och ger då upphov till en rotationsyta. Vi skall bestämma dess area. Notera att $(x-2)^2+y^2=1$ är en cirkel med radie 1 och medelpunkt $(2,0)$. Vi betraktar nu den högra halvan $(x \geq 2)$ av cirkeln:



Enligt B7.34 är tyngdpunkten för halvcirkeln $\mathbf{r}_M = \left(2+\frac{2}{\pi}, 0\right)$. När halvcirkeln roterar kring y-axeln kommer tyngdpunkten att färdas vägen $2\left(2+\frac{2}{\pi}\right)\pi$, d.v.s. två gånger banradien gånger pi. Samtidigt är kurvans (halvcirkelns) längd π. Enligt Guldins regel kommer alltså rotationsarean att bli

$$A = 2\left(2+\frac{2}{\pi}\right)\pi \cdot \pi = 4\pi(\pi+1).$$

Vi kan förstås lösa uppgiften utan att hänvisa till varken Guldins regel eller uppgift B7.34: Vi nöjer oss då med att beräkna rotationsarean som uppkommer då *kvartscirkeln* i det övre halvplanet $y \geq 0$ roterar kring y-axeln. Hela rotationsarean får vi då genom att dubblera den erhållna rotationsarean (eller hur?). Vi tänker oss att vi delar upp x-axeln i små bitar av längd dx. Kvartscirkelns längd i *en* sådan bit är $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$ där $y(x) = \sqrt{1-(x-2)^2}$. Denna lilla bågbit kommer att roteras en sträcka $2\pi x$, så arean av den lilla remsa som uppkommer är

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x\sqrt{1+y'^2}dx$$

och hela rotationsarean är

$$\int_2^3 dA = \int_2^3 2\pi x\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Sedan är det bara att ”gångra” med två. Detaljerna överlåter jag till dig. Eller Wolfram|Alpha:
http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+2+pi+x+sqrt(1+%2B+(D%5Bsqrt(1-(x-2)^2)%2C+x%5D)^2)+from+x%3D2+to+3